Ueber

die geradlinige Fläche dritter Ordnung

und

deren Abbildung auf einer Ebene

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der Universität Strassburg

von

Benno Klein

aus Stolp i. P.

BERLIN.

Druck von H. S. Hermann.

1876.

77
1

Ueber

die geradlinige Fläche dritter Ordnung

und

deren Abbildung auf einer Ebene

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der Universität Strassburg

von

Benno Klein

aus Stolp i. P.

BERLIN.

Druck von H. S. Hermann.

1876.

Von der Erzeugung der Regelflächen II. Ordnung durch projectivische Punktreihen I. Ordnung gelangt man in systematischem Fortgange zur geradlinigen Fläche III. Ordnung, wenn man diese durch zwei projectivische Punktreihen I. und II. Ordnung erzeugt. Obgleich schon mehrfach behandelt, ist die Fläche III. Ordnung von diesem Ausgangspunkte aus noch nicht untersucht worden. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit, und von ihm aus werden im ersten Theile derselben die wesentlicheren Eigenschaften der Fläche abgeleitet. In Einzelheiten bin ich mit Rücksicht auf die ausführliche Behandlung, welche der Fläche besonders in der Arbeit von Weyr zu Theil geworden ist, nicht eingegangen.

Der zweite Theil der Arbeit bringt die Abbildung der Fläche auf einer Ebene, und behandelt mit ihrer Hilfe die Geometrie auf der Fläche. Die Abbildung stimmt mit derjenigen überein, zu welcher Clebsch (Crelles Journal, Band 67) auf analytischem Wege, Reye aus der geometrischen Verwandtschaft zwischen einem Gebüsch von Flächen II. Ordnung und einem räumlichen Systeme und Cremona, letzterer ohne Angabe des Weges, gelangen. Zu der hier angewandten Methode wurde ich durch eine Bemerkung von Clebsch in seiner Abhandlung im ersten Bande der „Mathematischen Annalen“ „Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung“, § 2, geführt; er selbst benutzt den Gedanken zur Abbildung sowohl der allgemeinen, als der geradlinigen Fläche

III. Ordnung im fünften Bande der „Mathematischen Annalen“. Ihrem Prinzipe nach ist die Methode zurückzuführen auf die „Allgemeine Anmerkung“ in Steiners „Systematischer Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“.

Die geradlinige Fläche III. Ordnung giebt Anlass zu einer einfach unendlichen Anzahl von Nullsystemen (§ 5), was, wie ich glaube, noch nicht bemerkt worden ist. Zu jedem dieser Nullsysteme gehört eine Haupttangentencurve der Fläche in der Weise, dass jedem Punkte der Curve seine Schmiegungsebene in dem Systeme zugeordnet ist, und umgekehrt wird durch jede Haupttangentencurve ein Nullsystem bestimmt (§ 14). Ferner lässt sich die reciproke Beziehung der Fläche auf sich selbst auch in ihrer ebenen Abbildung wiedergeben, wobei sich herausstellt, dass jedem durch die Fläche bestimmten Nullsysteme in der Abbildung ein ebenes Polarsystem entspricht (§ 9).

Manche Sätze, welche auch leicht direct hätten bewiesen werden können, oder welche von anderer Seite her bekannt sind, so Sätze über ebene Curven III. Ordnung mit einem Doppelpunkte, sind mittelst der Abbildung bewiesen worden, weil dadurch die Anwendbarkeit der Methode in interessanter Weise illustrirt zu werden schien. Den Schluss bildet die Abbildung der geradlinigen Fläche III. Ordnung mit einer Leitlinie.

Von den Arbeiten, welche sich mit der geradlinigen Fläche III. Ordnung ausschliesslich oder zum Theil beschäftigen, sind mir die folgenden bekannt geworden:

Clebsch. „Ueber die Steiner'sche Fläche.“ Crelles Journal. Band 67. § 7.

„Bemerkung über die Geometrie auf der windschiefen Fläche dritter Ordnung.“ Mathematische Annalen. Band 1.

„Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung.“ Mathematische Annalen. Band 5.

Cremona. „Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.“ Crelles Journal. Band 58.

„Sulle superficie gobbe del terz' ordine.“ Atti del Reale Istituto Lombardo. vol. II. 1860.

„Sur les surfaces gauches du troisième degré.“ Crelles Journal. Band 60.

„Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano.“ Rendiconti del R. Istituto Lombardo. vol. IV. 1867.

Reye. „Geometrie der Lage.“ Zweite Abtheilung. Hannover, 1868. S. 93, 209. Anhang. §§ 199—201.

Emil Weyr. „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein—zwei—deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung.“ Leipzig, 1870.

Ferner die bezüglichen Abschnitte in

Salmon. „Analytische Geometrie des Raums.“ Bearbeitet von Fiedler. Zweite Auflage. Leipzig, 1874. Theil II. §§ 264—266, 366.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Reye, bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und mehrfach ertheilten Rath verpflichtet; ich sage ihm für das Wohlwollen, welches er mir bewiesen hat, meinen aufrichtigen Dank.

Strassburg i. E., im Juni 1876.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552708_0126

I.

§ 1.

Erzeugung der Fläche durch projectivische Punktreihen. Die Doppellinie der Fläche.*)

Eine Curve II. Ordnung $\varkappa^2$ und eine Gerade e seien projectivisch aufeinander bezogen; e soll mit $\varkappa^2$ weder in derselben Ebene liegen, noch soll e mit $\varkappa^2$ einen Punkt entsprechend gemein haben. Die beiden Punktreihen erzeugen eine Regelschaar R^3, deren Leitlinie die Gerade e ist. Die Strahlen der Schaar schneiden sich im Allgemeinen nicht; sie erfüllen daher eine windschiefe Fläche G^3, und heissen deren Erzeugende.

Wir wollen zunächst annehmen, dass $\varkappa^2$ und e einen Punkt überhaupt nicht gemein haben. Ist alsdann x eine Erzeugende, so schneidet die Ebene $\overline{ex}$ die Curve $\varkappa^2$ ausser im Punkte $x\varkappa^2$ im Allgemeinen noch in einem zweiten Punkte. Diesem entspricht ein Punkt von e. Daraus folgt:

Die Ebenen des Ebenenbüschels, dessen Axe die Leitlinie e ist, enthalten im Allgemeinen je zwei Erzeugende der windschiefen Fläche G^3.

Der Schnittpunkt zweier solchen Erzeugenden ist ein Doppelpunkt der Fläche.

Projicirt man aus einem Punkte B von $\varkappa^2$ die projectivischen Punktreihen $\varkappa^2$ und e, so erhält man zwei projectivische, concentrisch aber im Allgemeinen nicht perspectivisch liegende

*) Vergl. Cremona. Crelles Journal. Bd. 58. S. 138. — Atti del R. Istituto Lombardo. vol. II. S 292. — Reye. „Geometrie der Lage". Abtheilung II. S. 258.

Strahlenbüschel erster Ordnung. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen bilden einen Ebenenbüschel II. Ordnung; jede Ebene desselben projicirt eine Erzeugende der Fläche G^3.

Ist b die durch B gehende Erzeugende, so enthält die Ebene β des Ebenenbüschels II. Ordnung, durch welche b projicirt wird, zugleich die Tangente der Curve z^2 im Punkte B.

Dem Ebenenbüschel gehört die Ebene α der Curve z^2 an; in α liegt diejenige Erzeugende a von G^3, welche den Punkt $e\alpha$ mit seinem entsprechenden von z^2 verbindet. Ferner enthält eine Ebene des Büschels die Leitlinie e; diese Ebene ist identisch mit der Ebene $\overline{be}$; durch sie wird die zweite in $\overline{be}$ enthaltene Erzeugende von G^3 aus B projicirt.

Es sei nun a_1 die zweite Erzeugende der Ebene $\overline{ea}$. Projicirt man z^2 und e aus dem Punkte $\dot{a_1}z^2$, so entspricht der gemeinsame Strahl a der beiden Strahlenbüschel sich selbst. Daher bilden in diesem Falle die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen einen Ebenenbüschel erster Ordnung. Oder:

> Die Regelschaar R^3 wird aus dem Punkte $\dot{a_1}z^2$ durch einen Ebenenbüschel I. Ordnung, aus jedem anderen Punkte von z^2 durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

Die Schnittlinie der Ebenen, durch welche irgend zwei, also auch zwei sich schneidende Erzeugende aus $\dot{a_1}z^2$ projicirt werden, ist die Axe des Ebenenbüschels I. Ordnung. Da der Schnittpunkt der Erzeugenden auf der Axe liegt, so folgt:

> Der Ort der Doppelpunkte der Fläche G^3 ist eine Gerade, welche mit der Curve z^2 einen Punkt $(\dot{a_1}z^2)$ gemein hat.

Diese Gerade heisse die Doppellinie d der Fläche G^3, oder im Gegensatze zur einfachen Leitlinie e die doppelte Leitlinie d der Regelschaar R^3. —

Die beiden Leitlinien liegen windschief zu einander.

Wenn sich durch e Berührungsebenen an z^2 legen lassen,

so theilen sie die Ebenen des Büschels e in zwei Gruppen; die Ebenen der einen Gruppe enthalten je zwei Erzeugende, die Ebenen der anderen keine, die beiden Berührungsebenen enthalten je eine Erzeugende. Dem entsprechend wird die Doppellinie d in zwei Strecken getheilt; durch die Punkte der einen gehen je zwei Erzeugende, durch die der anderen geht keine, durch die beiden Schnittpunkte mit den Berührungsebenen geht je eine Erzeugende. Gehen dagegen durch e keine Berührungsebenen an $\varkappa^2$, so liegen in jeder Ebene des Büschels e und gehen durch jeden Punkt von d je zwei Erzeugende.

Die Ebenen des Büschels d enthalten in jedem Falle je eine Erzeugende. —

Durch den Ebenenbüschel d werden die Punktreihen $\varkappa^2$ und e projectivisch auf einander bezogen. Verbindet man die in einer Ebene γ enthaltenen entsprechenden Punkte durch eine Gerade x, so beschreibt x, während γ um d sich dreht, die Regelschaar R^3, und schneidet fortwährend die Gerade d. Oder:

> Eine Gerade, welche an einer Curve II. Ordnung und zwei windschiefen Geraden, von denen die eine einen Punkt mit der Curve gemein hat, gleitet, beschreibt eine Regelschaar R^3 dritter Ordnung. (3).

§. 2.

Reciproke Erzeugungsart der Fläche.*)

Der Ebenenbüschel II. Ordnung, durch welchen die Regelschaar R^3 aus einem Punkte B von $\varkappa^2$ projicirt wird, ist projectivisch zu dem Strahlenbüschel B ($\varkappa^2$), in welchem er von der Ebene α der Curve $\varkappa^2$ geschnitten wird, daher projectivisch zu $\varkappa^2$ und e, und weil der Ebenenbüschel d zur Punktreihe e perspectivisch ist, auch projectivisch zu diesem. Entsprechende Ebenen der beiden Büschel schneiden sich in einer Erzeugenden. Nun kann die Gerade d in

*) Vergl. Cremona. Crelles Journal Bd. 58. S. 140. — Atti del R. Jst. Lomb. vol. II. S. 295.

keiner Ebene des Büschels II. Ordnung B liegen. Denn angenommen, es sei die Ebene β beiden Büscheln gemeinsam, so hat β mit der durch B gehenden Erzeugenden b den Punkt B, und weil β nach Annahme d enthält, auch den Punkt db gemein; also würde b ganz in β liegen, und β mit der Ebene db identisch sein. Die Ebene β aber des Büschels B, durch welche die Erzeugende b projicirt wird, enthält die Tangente der Curve z^2 im Punkte B. (1.) Diese Tangente nun ist windschief zu d, mithin führt die Annahme, dass d in einer Ebene des Büschels B liege, auf einen Widerspruch.

Hieraus ergiebt sich die folgende zu der ursprünglichen (1.) reciproke Erzeugungsart der Fläche G^3:

> Bezieht man einen Ebenenbüschel II. Ordnung projectivisch auf einen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe nicht durch den Mittelpunkt des ersteren geht und in keiner Ebene desselben liegt, so erfüllen die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine windschiefe Fläche G^3, deren Doppellinie die Axe des Ebenenbüschels I. Ordnung ist.

Weil die Leitlinie e in einer Ebene des Büschels B liegt (1.), so werden die Büschel B und d durch e projectivisch auf einander bezogen. Bringt man die durch einen Punkt C von e gehenden entsprechenden Ebenen zum Durchschnitt, so beschreibt die Schnittlinie x, während C die Gerade e durchläuft, die Regelschaar R^3. Hierbei schneidet x fortwährend die Geraden d und e, und berührt die vom Büschel B eingehüllte Kegelfläche II. Ordnung. Diese wird zugleich von e berührt. Somit folgt:

> Eine Gerade, welche an zwei windschiefen Geraden gleitet und dabei fortwährend eine Kegelfläche II. Ordnung berührt, welche zugleich von einer der beiden festen Geraden berührt wird, beschreibt eine Regelschaar R^3 dritter Ordnung. (3.)*)

*) Vergl. Weyr „Regelflächen dritter Ordnung.“ S. 41.

§. 3.

Die Fläche ist von der dritten Ordnung. Die Curven zweiter Ordnung der Fläche. *)

Eine beliebige Ebene γ schneidet die Büschel B und d in zwei projectivischen Strahlenbüscheln, von denen der eine im Allgemeinen zweiter, der andere erster Ordnung ist. Der Schnittpunkt entsprechender Strahlen liegt auf der Schnittlinie entsprechender Ebenen von B und d, das ist auf einer Erzeugenden. Daher ist das Erzeugniss der beiden Strahlenbüschel identisch mit der Curve, in welcher die Fläche G^3 von der Ebene der Strahlenbüschel geschnitten wird. Nun erzeugen die Büschel im Allgemeinen eine Curve III. Ordnung und IV. Klasse,**) woraus folgt:

Die windschiefe Fläche G^3 ist von der dritten Ordnung.

Die Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ hat den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlenbüschels I. Ordnung zum Doppelpunkt. Mithin:

Der Schnittpunkt einer Ebene mit der Doppellinie der windschiefen Fläche III. Ordnung ist zugleich Doppelpunkt der Schnittcurve III. Ordnung.

Enthält die Ebene γ eine Erzeugende c, so können wir annehmen, dass γ durch B gehe, da B beliebig auf x^2 angenommen ist. γ gehört dann dem Ebenenbüschel II. Ordnung B an, und schneidet ihn und den Büschel d in zwei projectivischen, aber im Allgemeinen nicht perspectivischen Strahlenbüscheln I. Ordnung. Deren Erzeugniss, eine Curve II. Ordnung, liegt ganz auf G^3. Die beiden Strahlenbüschel sind nur dann in perspectivischer Lage, wenn γ mit der Ebene $\overline{Be}$ identisch ist; e ist der perspectivische Durchschnitt der Büschel. In der That schneidet jede durch e gehende Ebene die Fläche G^3 in zwei Erzeugenden (1.). Es folgt:

---

*) Vergl. Weyr. l. c. S. 18. 20. 30.

**) Schröter. Crelles J. Bd. 54. S. 31. — Reye. „G. d. L.“ Abth. I. S. 108.

Die windschiefe Fläche III. Ordnung wird von jeder Ebene, welche eine Erzeugende derselben, aber keine der beiden Leitlinien enthält, in einer Curve II. Ordnung geschnitten. —

Die Curve enthält den Punkt cd, weil er der Mittelpunkt des einen erzeugenden Strahlenbüschels ist. Dieser Punkt bleibt fest, wenn γ um c sich dreht; also:

Alle Curven II. Ordnung der windschiefen Fläche III. Ordnung, deren Ebenen sich in einer Erzeugenden der Fläche schneiden, gehen durch den Punkt, welche die Erzeugende mit der Doppellinie der Fläche gemein hat. —

Da alle auf G^3 liegenden Curven II. Ordnung mit d einen Punkt gemein haben, so werden sie durch den Ebenenbüschel d projectivisch auf z^2 und e bezogen, und zwar liegen entsprechende Punkte auf derselben Erzeugenden. Vertauscht man daher z^2 mit einer anderen auf G^3 liegenden Curve II. Ordnung λ^2, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte die nämliche Regelschaar R^3, wie die durch z^2 und e erzeugte. — λ^2 hat mit e keinen Punkt gemein. Denn ist c die in der Ebene γ von λ^2 liegende Erzeugende, so könnte nur der Punkt ce ein gemeinschaftlicher Punkt von λ^2 und e sein. Rechnet man nun γ zum Ebenenbüschel II. Ordnung B, so ist der nicht auf d liegende gemeinsame Punkt von c und λ^2 der Schnittpunkt des Berührungsstrahls der Ebene γ mit der Erzeugenden c. Durch diesen Strahl geht nur die eine Ebene γ des Büschels B. Wäre er nun identisch mit der Geraden, welche B mit ce verbindet, so würde durch ihn noch eine zweite Ebene des Büschels B gehen, nämlich die Ebene Be, durch welche die mit c in einer Ebene liegende Erzeugende c_1 projicirt wird. Aus alledem folgt:

Die ursprünglich gegebene Curve II. Ordnung z^2 spielt in keiner Weise eine ausgezeichnete Rolle.

Und ferner:

Die Regelschaar R^3 wird aus jedem ihrer Punkte, welcher

nicht auf einer Leitlinie liegt, durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung, aus einem Punkte aber einer Leitlinie durch den Ebenenbüschel I. Ordnung projicirt, dessen Axe die Leitlinie ist (1).

§. 4.

Die Berührungsebenen der Fläche. Die Fläche ist von der dritten Klasse. *)

Die Curve II. Ordnung z^2, in welcher eine durch eine Erzeugende a gehende Ebene α die Fläche G^3 schneidet, bildet mit a zusammen eine Curve III. Ordnung, welche zwei Doppelpunkte besitzt. Der eine dieser Punkte, $d\dot{z}^2$, gehört zu den Doppelpunkten der Fläche, deren Ort die Doppellinie d ist; jede durch $d\dot{z}^2$ gehende Gerade trifft in ihm G^3 in zwei zusammenfallenden Punkten (3). Der andere Doppelpunkt A ist derjenige Punkt, in welchem a die Curve z^2 zum zweiten Male trifft; nur diejenigen durch A gehenden Geraden, welche in der Ebene α liegen, treffen in A die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten, das heisst, α ist Berührungsebene der Fläche und A ihr Berührungspunkt. Die beiden Haupttangenten der Fläche im Punkte A sind die Erzeugende a und die Tangente von z^2 in A. In α liegt ausserdem ein Strahlenbüschel II. Ordnung von Tangenten der Fläche, derjenige nämlich, welcher z^2 einhüllt.

Die Linie III. Ordnung, in welcher eine durch e gehende Ebene die Fläche schneidet, zerfällt in drei Gerade, e und zwei Erzeugende (1). Diese Linie hat ausser dem Doppelpunkte auf d noch zwei Doppelpunkte, nämlich die Schnittpunkte der beiden Erzeugenden mit e; ihre Ebene ist also eine doppeltberührende.

In einer Ebene des Büschels d zerfällt die Linie III. Ordnung in die Doppellinie d und eine Erzeugende x. Nun trifft jede

*) Vergl. Cremona. Crelles J. Bd. 58. — Atti del R. I. L. vol. II. S. 294 und 292. — Weyr. l. c. S. 33 u. f.

in der Ebene $\underline{dx}$ liegende Gerade, welche durch den Punkt $\dot{dx}$ geht, in ihm die Fläche in drei zusammenfallenden Punkten. Daher ist $\overline{dx}$ als eine Ebene zu betrachten, welche die Fläche G^3 in $\dot{dx}$ berührt. Durch $\dot{dx}$ geht aber noch eine zweite Erzeugende x_1; dieser Punkt ist also zugleich Berührungspunkt der Ebene $\overline{dx_1}$.

Jede durch eine Erzeugende gelegte Ebene ist somit eine Berührungsebene der windschiefen Fläche III. Ordnung; die einfache Leitlinie ist die Axe eines Büschels von doppelt-berührenden Ebenen; die Doppellinie ist der Ort derjenigen Punkte, denen je zwei Berührungsebenen zugehören. *)

Eine beliebige Gerade trifft im Allgemeinen drei Erzeugende der Fläche; durch sie lassen sich also drei Berührungsebenen von G^3 legen, oder:

Die windschiefe Fläche III. Ordnung ist zugleich von der dritten Klasse.

Das Nämliche folgt aus der ersten Erzeugungsart der Fläche (1). Denn es ergiebt sich aus ihr der Satz:

Die Regelschaar R^3 wird aus jedem Punkte, der auf keinem Strahle derselben liegt, durch eine Kegelfläche III. Klasse und (im Allgemeinen) IV. Ordnung projicirt (3; 10).

Dieser Kegel III. Klasse, oder in anderer Bezeichnung Ebenenbüschel III. Ordnung, hat die durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene des Büschels e zur Doppelebene.

Durch den Ebenenbüschel d, bezüglich die Punktreihe e werden alle auf G^3 liegenden Curven II. Ordnung und ebenen Curven III. Ordnung, sowie alle die Regelschaar R^3 projicirenden Ebenenbüschel II. und III. Ordnung projectivisch auf einander bezogen. Da entsprechende Elemente dieser Gebilde durch die nämliche Erzeugende bestimmt werden, so wollen wir sagen,

*) Cremona. Atti d. R. I. L. vol. II. S. 292.

die Gebilde liegen perspectivisch zur Regelschaar R^3. Nennen wir vier Strahlen der Regelschaar harmonische Strahlen, wenn sie in vier harmonischen Ebenen des Ebenenbüschels d liegen, also auch durch vier harmonische Punkte der Punktreihe e gehen, so werden durch vier harmonische Strahlen der Regelschaar R^3 alle Mal vier harmonische Elemente der oben genannten Gebilde bestimmt.

§. 5.

Durch die Fläche bestimmte Nullsysteme.

Die Fläche G^3 kann auf zwei zu einander reciproke Arten erzeugt werden, woraus folgt:

Zu jedem Satze über Punkte der geradlinigen Fläche III. Ordnung gehört ein reciproker Satz über Berührungsebenen derselben.

Es ist hierbei gleichgiltig, welche Curve II. Ordnung $\varkappa^2$ der Fläche und welchen zu R^3 perspectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung A man zur doppelten Erzeugung der Fläche verwendet.

Nun aber sei A der Berührungspunkt der Ebene α von $\varkappa^2$ (4), und R^3 das eine Mal durch die Punktreihen $\varkappa^2$ und e, das andere Mal durch die Büschel A und d erzeugt. Die Punktreihen $\varkappa^2$ und e wollen wir als zu einem Raume Σ, die Büschel A und d als zu einem zweiten Raume Σ_1 gehörend betrachten. Dann sind die Räume Σ und Σ_1 durch die Fläche G^3 reciprok aufeinander bezogen, und zwar in der Art, dass sie zusammen ein Nullsystem bilden, in welchem den Punktreihen $\varkappa^2$ und e die Büschel A und d zugeordnet sind.

Sind nämlich b, c, f drei beliebige Erzeugende von G^3, von denen keine mit der in α enthaltenen Erzeugenden a identisch ist, so werden Σ und Σ_1 reciprok aufeinander bezogen, wenn

*) v. Staudt. „Geometrie der Lage.“ Nürnberg, 1847. S. 69. — Reye. „G. d. L.“ Abth. II. S. 20.

man den fünf Punkten x^2b, x^2c, x^2f, eb, ec der Reihe nach die fünf Ebenen $\overline{Ab}$, Ac, $\overline{Af}$, $\overline{db}$, $\overline{dc}$ als entsprechende zuweist.*) Der Punktreihe e von Σ entspricht dann ein zu ihr projectivischer Ebenenbüschel d von Σ_1. Nun entspricht der Ebene α von Σ, als Träger der Punkte x^2b, x^2c, x^2f, der Schnittpunkt A der ihnen zugewiesenen Ebenen von Σ_1, folglich dem Punkte $e\alpha$ von Σ die Ebene $\overline{dA}$ von Σ_1, welche die in α liegende Erzeugende a und somit den Punkt $e\alpha$ enthält. Ferner gehen nach Annahme die Ebenen $\overline{db}$ und $\overline{dc}$ durch die ihnen entsprechenden Punkte von e; also liegt der Ebenenbüschel d perspectivisch zur Punktreihe e; das ist aber die nämliche projectivische Beziehung, wie sie durch die Fläche G^3 hergestellt wird.

Dem Ebenenbüschel e von Σ ist die Punktreihe d von Σ_1 zugeordnet. Da diejenigen drei Ebenen, welche e mit x^2b, x^2c, x^2f verbinden, durch ihre entsprechenden Punkte, nämlich die Schnittpunkte von d mit den Ebenen $\overline{Ab}$, Ac, $\overline{Af}$, gehen, so liegt der Büschel e perspectivisch zur Punktreihe d. Insbesondere also ist dem Punkte da von Σ_1 die Ebene $\overline{eA}$ oder $\overline{ea}$ von Σ zugeordnet.

Der Curve x^2 nun von Σ entspricht in Σ_1 ein zu ihr, also auch (4.) zum Ebenenbüschel A projectivischer und mit diesem concentrischer Ebenenbüschel II. Ordnung A'. Die Büschel A und A' haben die drei Ebenen $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Af}$ entsprechend gemein. Nun entspricht der Verbindungslinie der Punkte x^2b und eb von Σ die Schnittlinie der Ebenen $\overline{Ab}$ und $\overline{db}$ von Σ_1, d. h. b entspricht sich selbst; ebenso sind c und f sich selbst zugeordnet. Ferner entspricht der Schnittlinie der Ebenen α und $\overline{ea}$ von Σ die Verbindungslinie der Punkte A und da von Σ_1, also ist auch a sich selbst zugeordnet. Den vier Punkten von Σ_1, in denen e die Geraden a, b, c, f trifft, entsprechen daher

vier Ebenen von Σ, welche je eine dieser Erzeugenden enthalten und welche dem nämlichen Ebenenbüschel I. Ordnung angehören. Die Axe desselben schneidet a, b, c und f, und ist somit entweder mit e oder mit der zweiten Transversalen von a, b, c und f, das ist d, identisch. Fiele sie mit e zusammen, so würde dem Punkte $\dot{e}\dot{b}$ von Σ_1 die Ebene $\overline{eb}$ von Σ entsprechen; dieser Ebene von Σ ist aber in Σ_1 der Punkt $\dot{d}\dot{b}$ zugeordnet, mithin entspricht der Geraden e von Σ_1 die Gerade d von Σ. Daraus folgt, dass dem Punkte $\dot{d}\dot{a}$ oder $\varkappa^2\dot{d}$ von Σ die Ebene $\overline{ea}$ von Σ_1 zugeordnet ist, und dass diese Ebene somit dem Ebenenbüschel II. Ordnung A' angehört. Dem nämlichen Punkte von $\varkappa^2$ ist aber in der durch die Fläche G^3 hergestellten projectivischen Beziehung von $\varkappa^2$ zum Ebenenbüschel A die nämliche Ebene zugeordnet; die projectivischen Büschel A und A' haben somit noch eine vierte Ebene entsprechend gemein, und sind daher identisch.*)

Damit ist nachgewiesen, dass man die Ebenenbüschel d und A und die Punktreihen e und $\varkappa^2$ als bezüglich entsprechende Gebilde in zwei reciproken Räumen betrachten kann. Umgekehrt: Weist man den Büscheln d und A die zu ihnen perspectivischen Punktreihen e und $\varkappa^2$ als entsprechende zu, so werden dadurch zwei Räume reciprok aufeinander bezogen. Denn den fünf Punkten $\varkappa^2\dot{b}$, $\varkappa^2\dot{c}$, $\varkappa^2\dot{f}$, $\dot{e}\dot{b}$, $\dot{e}\dot{c}$ sind dann die fünf Ebenen $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Af}$, $\overline{ab}$, $\overline{dc}$ als entsprechende zugewiesen.

Ist nun x eine beliebige Erzeugende von G^3, so entsprechen den Punkten $\varkappa^2\dot{x}$ und $\dot{e}\dot{x}$ von Σ die Ebenen $\overline{Ax}$ und $\overline{dx}$ von Σ_1; x entspricht sich also selbst, und jedem Punkte von x entspricht eine durch x gehende Ebene. Weil die Punkte von Σ, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen von Σ_1 liegen, nicht auf einer

*) Vergl. v. Staudt. „Beiträge zur Geometrie der Lage.“ I. Heft. Nürnberg, 1856. S. 9. — Reye. „G. d. L.“ Abth. I. S. 105.

**) Reye. „G. d. L.“ II. S. 65. 86.

Fläche II. Ordnung enthalten sind, so bilden die reciproken Räume Σ und Σ_1 zusammen ein Nullsystem **), zu dessen Leitstrahlen die Erzeugenden von G^3 gehören.

Diese Beziehung zwischen den Räumen Σ und Σ_1 findet nicht statt, wenn man den Ebenenbüschel A mit einem anderen vertauscht, dessen Mittelpunkt B ein vom Berührungspunkte A der Ebene α verschiedener Punkt von $\varkappa^2$ ist. Denn dem Punkte $\dot{e}\alpha$ von Σ entspricht alsdann in Σ_1 die Ebene $\underline{dB}$; diese geht aber durch $\dot{e}\alpha$ nicht hindurch. Wohl aber erhält man ein zweites, von dem ersten im Allgemeinen verschiedenes Nullsystem, wenn man $\varkappa^2$ mit einer anderen zu R^3 perspectivischen Curve II. Ordnung und zugleich A mit dem Berührungspunkte der Curvenebene vertauscht (9; 14). In jedem so bestimmten Nullsysteme sind die Strahlen der Regelschaar R^3 Leitstrahlen, und d und e sind einander zugeordnete Gerade.

Betrachtet man die fünf Punkte $\dot{\varkappa^2}\dot{b}$, $\dot{\varkappa^2}\dot{c}$, $\dot{\varkappa^2}\dot{f}$, $\dot{d}\dot{b}$, $\dot{d}\dot{c}$ als zum Raume Σ gehörig, so sind ihnen im Raume Σ_1 die Ebenen $\underline{Ab}$, $\underline{Ac}$, $\underline{Af}$, eb, $\underline{ec}$, und daher den Punktreihen $\varkappa^2$ und d die Büschel A und e zugeordnet. Ein Nullsystem kann daher auch in der Art festgelegt werden, dass man den Punktreihen $\varkappa^2$ und d von Σ die zu ihnen perspectivischen Ebenenbüschel A und e von Σ_1 als entsprechende zuweist.

§. 6.

Cuspidalpunkte und Cuspidalebenen der Fläche.*)

Durch die Ebenen des Büschels e werden die Punkte der ursprünglich gegebenen Curve $\varkappa^2$ involutorisch gepaart**); je

---

*) Vergl. Cremona. Atti. d. R. J. L. vol. II. S 292. 294. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 258. — Weyr. l. c. S. 44. u. f.

**) Seydewitz. Grunert's Archiv. Theil IV. S. 264. — Ders. „Das Wesen der involutorischen Gebilde etc.“ Heiligenstadt 1846. S. 69. — v. Staudt. „Geometrie der Lage.“ S. 139. — Reye. „G. d. L.“ I. S. 117. — Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Bd. II. Herausgegeben von Schröter, Leipzig 1867. S. 138. u. f.

zwei einander zugeordnete Punkte liegen auf zwei in einer Ebene von e enthaltenen Erzeugenden. Nun ist $\varkappa^2$ projectivisch zu allen zur Regelschaar R^3 perspectivischen Curven II. Ordnung, zur Punktreihe I. Ordnung e, zu allen zu R^3 perspectivischen Ebenenbüscheln II. Ordnung und zum Ebenenbüschel d. Mit den Punkten von $\varkappa^2$ sind daher die Elemente der genannten Gebilde involutorisch gepaart, und zwar werden je zwei einander zugeordnete Elemente durch zwei in einer Ebene des Büschels e liegende Erzeugende bestimmt.

Gehen durch e zwei Ebenen, welche $\varkappa^2$ berühren (1.), so sind die beiden Berührungspunkte Ordnungselemente der involutorischen Punktreihe $\varkappa^2$. Diese Ebenen heissen die Cuspidalebenen σ und σ_1, die in ihnen liegenden Erzeugenden die singulären Erzeugenden s und s_1, deren Schnittpunkte mit d die Cuspidalpunkte S und S_1 der Fläche G^3.

Die singulären Erzeugenden s und s_1 bestimmen in der involutorischen Paarung der Elemente jedes zu R^3 perspectivischen Gebildes zwei Ordnungselemente. Insbesondere sind für jede Curve II. Ordnung von G^3 die Punkte, welche sie mit s und s_1 gemein hat, Ordnungselemente. Hieraus folgt:

> Jede Curve II. Ordnung der geradlinigen Fläche III. Ordnung wird von den Cuspidalebenen in Punkten der singulären Erzeugenden berührt.

Enthält die Ebene der Curve eine singuläre Erzeugende, z. B. s, so geht die Curve durch den Cuspidalpunkt S (3.), und wird daher in diesem Punkte von s berührt. Daraus folgt:

> Alle durch eine singuläre Erzeugende der geradlinigen Fläche III. Ordnung gehenden Berührungsebenen derselben haben den auf der Erzeugenden gelegenen Cuspidalpunkt zum Berührungspunkte.

Hierzu gehören die reciproken Sätze:

> Alle Kegelflächen II. Ordnung, deren einhüllende Ebenenbüschel perspectivisch zur Regelschaar R^3 liegen, gehen durch die Cuspidalpunkte der geradlinigen Fläche III. Ordnung.

Diejenigen dieser Kegelflächen, deren Mittelpunkte auf einer singulären Erzeugenden der Fläche liegen, werden von der Cuspidalebene, welche die Erzeugende enthält, in dieser berührt.

Jede der beiden Cuspidalebenen berührt die geradlinige Fläche III. Ordnung in allen Punkten einer singulären Erzeugenden. —

Es folgt weiter:

Jede durch einen Cuspidalpunkt gehende oder in einer Cuspidalebene liegende Gerade berührt die geradlinige Fläche III. Ordnung in einem Punkte einer singulären Erzeugenden. —

II.

§. 7.

Abbildung der geradlinigen Fläche III. Ordnung auf einer Ebene. Die Bilder der Erzeugenden und Leitlinien.*)

Nimmt man zwei windschiefe Erzeugende a und b der Fläche G^3 und eine beliebige Ebene ε des Raumes fest an, so bestimmt eine Gerade u, welche a und b schneidet, zu dem dritten Punkte, in welchem sie die Fläche trifft, einen Punkt von ε. Wenn u alle möglichen Lagen annimmt, so wird die Fläche G^3 der Art auf die Ebene ε bezogen, dass jedem Punkte von G^3 ein und im Allgemeinen nur dieser eine Punkt von ε entspricht, und umgekehrt. Wir sagen, G^3 sei auf ε abgebildet.**)

Zu jeder auf G^3 liegenden Curve C bestimmt die Gerade u, an a, b und C gleitend, eine Bildcurve C'.

*) Vergl. Clebsch. Crelles Journal Bd. 67. S. 17. — Mathematische Annalen Bd. 5. S. 417. — Cremona. Rendiconti del R. Jstituto Lombardo. vol. IV. 1867. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 258.

**) Vergl. Clebsch. Math. Annalen Bd. I. S. 255. — Salmon-Fiedler. „Anal. Geometrie des Raums.“ II. Leipzig 1874. S. 459. 461. — Steiner. „Systemat. Entwickelung etc.“ Berlin 1832. S. 252.

Die Ebene ε legen wir durch die Doppellinie d von G^3, so zwar, dass ε weder a noch b enthält. Der Punkt, in welchem die Leitlinie e die Ebene ε trifft, heisse der Fundamentalpunkt O′ der Abbildung.

Ist nun x eine dritte Erzeugende von G^3, so beschreibt u, an a, b und x gleitend, die eine Regelschaar einer geradlinigen Fläche II. Ordnung F^2. Der Regelschaar gehören die Geraden d und e an, denn beide schneiden a, b und x.

Die Ebene ε nun enthält d, und schneidet folglich die F^2 noch in einer zweiten Geraden x′. Diese muss e treffen, geht also durch O′. Durch die bewegliche Gerade u ist x′ projectivisch auf x bezogen. Es folgt:

> Die Strahlen der Regelschaar R^3 werden durch die Strahlen des Büschels I. Ordnung abgebildet, dessen Mittelpunkt der Fundamentalpunkt O′ der Abbildung ist.

Dem Punkte, in welchem die Erzeugende x die Leitlinie e trifft, entspricht für jede Lage von x der Punkt O′, oder:

> Die einfache Leitlinie der Regelschaar R^3 wird durch einen einzigen Punkt, den Fundamentalpunkt O′, abgebildet.

Dem Punkte $\dot{d}x$ entspricht der Punkt $\dot{d}x'$. Nun geht aber durch $\dot{d}x$ noch eine Erzeugende x_1, deren Bild x_1' mit x′ den Punkt O′ gemein hat, d also nothwendig in einem von $\dot{d}x'$ verschiedenen Punkte trifft. Auch dieser Punkt $\dot{d}x_1'$ entspricht dem Punkte $\dot{d}x$, so dass also jedem Punkte der Doppellinie d von G^3 in der Bildebene zwei getrennte Punkte einer mit d zusammenfallenden Geraden d′ entsprechen. Um die Lage dieser Punkte zu einander näher kennen zu lernen, legen wir durch a eine Ebene α, welche G^3 in der Curve II. Ordnung $\varkappa^2$, ε in der Geraden g, b und x in den Punkten B und X von $\varkappa^2$ schneiden möge. — Der Regelschaar, deren Leitlinien a, b und x sind, gehört die Gerade $\overline{BX}$ an. Trifft diese die Gerade g im Punkte X′, so ist $\overline{O'X'}$ die zweite in ε liegende Gerade der durch a, b und x gehenden Fläche II. Ordnung F^2,

also identisch mit x', dem Bilde von x. — Durch den Strahlenbüchel $B(x^2)$ ist nun x^2 projectivisch auf g und den Strahlenbüschel O'(g) bezogen; die Punkte von x^2 aber sind involutorisch gepaart, so zwar, dass zugeordnete Punkte auf zwei sich schneidenden Strahlen der Regelschaar R^3 liegen (6). Daraus folgt:

Der Strahlenbüschel I. Ordnung O', welcher die Regelschaar R^3 abbildet, ist ein involutorischer Büschel. Je zwei einander zugeordnete Strahlen desselben entsprechen zweien sich schneidenden (also in einer Ebene des Büschels e gelegenen) Strahlen von R^3.

Die Punkte der Doppellinie d der Fläche G^3 werden durch die Punktenpaare einer involutorischen Punktreihe I. Ordnung d' abgebildet, welche perspectivisch zum Büschel O' liegt.

Besitzt G^3 singuläre Erzeugende s und s_1, so besitzt der Büschel O' Ordnungselemente s' und s_1', und diese sind die Bilder der ersteren. Zugleich hat dann d' Ordnungselemente, nämlich die Punkte d's' und d's$_1$', und diese sind die Bilder der Cuspidalpunkte S und S_1. Die unendliche Gerade d' bildet in diesem Falle nur diejenige Strecke der Geraden d ab, auf welcher sich die Erzeugenden von G^3 treffen (1).

Diejenige Regelschaar, welche die Erzeugende b projectivisch auf ihr Bild b' bezieht, besteht aus Geraden, welche die Fläche G^3 in Punkten von b berühren. Das Gleiche gilt für a.

Die Bilder der Erzeugenden a_1 und b_1, welche mit a bezüglich b in der nämlichen Ebene des Büschels e liegen, sind die Schnittlinien von ε mit den Ebenen $\overline{ae}$ bezüglich $\overline{be}$, das sind die Geraden, welche O' mit den Punkten $a_1'd$ bezüglich $b_1'd$ verbinden.

a_1 und b_1 werden projectivisch auf ihre Bilder a_1' bezüglich b_1' durch die in den Ebenen $\overline{ae}$ bezüglich $\overline{be}$ liegenden Strahlenbüschel bezogen, deren Mittelpunkte die Punkte b'e' bezüglich a'e' sind. Die Punkte $a_1'd$ und $b_1'd$ fallen daher mit

den ihnen entsprechenden $a_1'd'$ und $b_1'd'$ zusammen. Die in ε liegende Erzeugende c von G^3 fällt ganz mit ihrem Bilde zusammen, daher auch cd mit einem seiner Bildpunkte. Ausser diesen drei Punkten von d kann es keinen geben, welcher mit einem Punkte des ihm entsprechenden Punktenpaars von d' zusammenfällt, denn x und x' gehören im Allgemeinen der nämlichen Regelschaar einer F^2 an.

Wie bisher, sollen auch im Folgenden die Gebilde der Bildebene ε durch einen oberen Index gekennzeichnet werden. Zwei sich schneidende Erzeugende von G^3 werden durch den nämlichen Buchstaben, von denen der eine einen unteren Index trägt, bezeichnet. Z. B. x und x_1 bezeichnen zwei sich schneidende Erzeugende, x' und x_1' deren Bilder, das sind zwei einander zugeordnete Strahlen des involutorischen Büschels O', und X' und X_1' die Schnittpunkte der letzteren mit d', das sind die Bildpunkte des auf d liegenden Punkts xx_1. –

§. 8.

Abbildung der Curven II. Ordnung der Fläche.

Eine auf G^3 liegende Curve II. Ordnung λ^2, deren Ebene die Ereugende x enthalten möge, hat mit a und b je einen Punkt gemein. Eine Gerade u, welche an a, b und λ^2 gleitet, beschreibt daher die eine Regelschaar einer geradlinigen Fläche II. Ordnung F^2. *) Weil d zu dieser Schaar gehört, schneidet ε die F^2 noch in einer Geraden, welche durch u projectivisch auf λ^2 bezogen ist. Diese Gerade geht, da λ^2 keinen Punkt mit e gemein hat (3), nicht durch O'. Es folgt:

Das Bild einer Curve II. Ordnung der Fläche G^3 ist eine Gerade, welche nicht durch den Fundamentalpunkt der Abbildung geht.

Alle Curven II. Ordnung, deren Ebenen den Ebenen-

*) v. Staudt, „Beiträge zur G. d. L." S. 11. – Reye, „G. d. L." I. S. 110.

büschel x bilden, haben mit x_1 den Punkt $\dot{dx}_1$ gemein (3), ihre Bilder also mit x_1' den Punkt $d'\dot{x}_1'$. Nun können die Bilder zweier Curven II. und überhaupt beliebiger Ordnung von G^3 nicht zusammenfallen, denn sonst müsste die an a und b gleitende Gerade u gleichzeitig beide Curven beschreiben, also G^3 jedes Mal in vier Punkten treffen. Daher:

> Beschreibt eine Ebene den Ebenenbüschel der Erzeugenden x, so beschreibt die Bildgerade der in ihr liegenden Curve II. Ordnung von G^3 den Strahlenbüschel $d'\dot{x}_1'$.

Da nun jede Gerade in ε Strahl irgend eines Strahlenbüschels ist, dessen Mittelpunkt auf d' liegt, so folgt:

> Jede nicht durch den Fundamentalpunkt O' gehende Gerade der Bildebene (abgesehen von d') ist Bild einer Curve II. Ordnung der Fläche G^3.

Wird λ^2 durch die Gerade l' abgebildet, so ist der Punkt $l'\dot{x}'$ das Bild des Punktes, in welchem die Ebene von λ^2 die Fläche G^3 berührt.

Ein Strahlenbüschel I. Ordnung in ε, dessen Mittelpunkt B' weder auf d' liegt, noch mit O' zusammenfällt, stellt die Curven II. Ordnung dar, welche durch den Punkt B von G^3 gehen, und deren Ebenen den zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschel II. Ordnung B bilden (3).

Der Durchschnitt einer Ebene γ des Büschels d mit G^3 wird durch d' und einen Strahl y' von O' dargestellt; die Schnittpunkte von y' und d' mit dem Strahle l' des Büschels $d'\dot{x}_1'$ sind die Bilder der beiden Durchschnittspunkte der Ebene γ mit der Curve λ^2. Fällt y' mit x_1' zusammen, so vereinigen sich die Schnittpunkte von l' mit d' und y' zu dem Punkte $d'\dot{x}_1'$. Daraus folgt:

> Eine durch eine Erzeugende x_1 und die Doppellinie d von G^3 gelegte Ebene berührt alle Curven II. Ordnung von G^3, deren Ebenen sich in der zweiten durch den Punkt

$x_1 d$ gehenden Erzeugenden x schneiden, im Punkte $x_1 d$. *) Aus der Abbildung folgt ferner:

Zwei Curven II. Ordnung der Fläche G^3 haben alle Mal einen und nur einen Punkt gemein. **)

Zwei weder auf den Leitlinien noch auf einer und derselben Erzeugenden liegende Punkte der Fläche G^3 können alle Mal durch eine und nur eine Curve II. Ordnung der Fläche verbunden werden. Dies findet auch statt, wenn von zwei Punkten der nämlichen Erzeugenden der eine auf der Doppellinie liegt.

Man erhält im allgemeinen Falle die Curve, indem man die beiden Punkte durch eine Gerade verbindet, und durch diese und die dritte von der Geraden getroffene Erzeugende von G^3 eine Ebene legt. Die in der Ebene liegende Curve II. Ordnung von G^3 geht durch die gegebenen Punkte.

§ 9.

Jedem durch die Fläche bestimmten Nullsysteme entspricht in der Bildebene ein Polarsystem.

Durch eine Gerade der Bildebene ε ist im Allgemeinen eine Berührungsebene der Fläche G^3 festgelegt; diese Ebene enthält die Curve II. Ordnung, deren Bild die Gerade ist. Daher werden, wenn man Ebene und Gerade einander zuordnet, die Berührungsebenen von G^3 durch die Geraden in ε dargestellt. — Ein Strahl x' des Büschels O' entspricht einer Ebene des Büschels e; derselben Ebene entspricht aber auch der Strahl x_1' von O'. Die Gerade d' ferner ist als Bild aller Ebenen des Büschels d zu betrachten. Somit folgt:

Ist die Fläche G^3 als Ort von Punkten nach der oben (7) angegebenen Methode auf ε abgebildet, nämlich so, dass jedem nicht auf d oder e liegenden Punkte ein nicht auf d' liegender und von O' verschiedener Punkt, den

*) Vergl. Weyr. l. c. S. 58.
**) Vergl. Weyr. l. c. S. 31.

Punkten von d je zwei einander zugeordnete Punkte der involutorischen Punktreihe d′ und der Geraden e der einzige Punkt O′ entspricht, so ist die Fläche als Einhüllende von Ebenen zugleich so auf ε abgebildet, dass jeder nicht durch e oder d gehenden Berührungsebene eine nicht durch O′ gehende und von d′ verschiedene Gerade, den Ebenen des Büschels e je zwei einander zugeordnete Gerade des involutorischen Büschels O′ und dem Ebenenbüschel d die einzige Gerade d′ entspricht.

Den beiden reciproken Erzeugungsarten der Fläche G^3 stehen somit zwei reciproke Abbildungen derselben auf der Ebene ε gegenüber, und hieraus folgt:

Je zweien reciproken Gebilden der Fläche G^3 entsprechen zwei reciproke Gebilde der Bildebene. Und umgekehrt.

Bei besonderer Lage nun der erzeugenden Ebenenbüschel und Punktreihen zu einander wurde durch die Fläche G^3 ein Nullsystem bestimmt (5). Wir behaupten:

Durch jedes vermittelst der Fläche G^3 bestimmte Nullsystem wird in der Bildebene ε ein Polarsystem bestimmt.

Dies ist der Fall, wenn in ε erstens jeder Geraden a′ ein und nur ein Punkt A′ und jedem Punkte A′ eine und nur eine Gerade a′ zugeordnet ist, und wenn zweitens, sobald A′ eine Gerade b′ beschreibt, a′ sich um den dieser Geraden zugeordneten Punkt B′ dreht.*)

Einer nicht durch d oder e gehenden Berührungsebene α von G^3 ist im Nullsysteme ein bestimmter Punkt A zugeordnet, daher der Bildgeraden a′ von α der Bildpunkt A′ von A. Umgekehrt ist dem Punkte A nur die eine Ebene α zugeordnet, daher auch dem Punkte A′ nur die eine Gerade a′. — A′ liegt im Allgemeinen nicht auf a′, weil A im Allgemeinen nicht auf der Curve liegt, deren Bild a′ ist, sondern auf der in der Curvenebene enthaltenen Erzeugenden (5). — Der Nullpunkt

*) v. Staudt. „G. d. L.“ S. 131 u. f. — Steiner-Schröter. l. c. S. 431. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 57.

einer Ebene des Büschels e ist ihr Schnittpunkt mit d; den beiden Punkten von d', welche ihn abbilden, sind die beiden Geraden von O' zugeordnet, welche die Ebene abbilden. — Der Nullpunkt einer Ebene des Büschels d endlich ist ihr Schnittpunkt mit e; daher ist der Geraden d' der Punkt O', somit jeder Geraden von ε ein und nur ein Punkt, und jedem Punkte eine und nur eine Gerade zugeordnet.

Beschreibt nun A eine, in der Ebene β liegende Curve II. Ordnung von G^3, so beschreibt die zugeordnete Ebene α einen Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen Mittelpunkt der der Ebene β zugeordnete Punkt B ist. In ε beschreibt hierbei A' die Bildgerade b' der Curve, und zugleich dreht sich die dem Punkte A' zugeordnete Gerade a' um B', den Bildpunkt von B.

Beschreibt A eine Erzeugende x, so dreht sich α um x (5). Hierbei beschreibt A' die Gerade x' und a' den Strahlenbüschel $\dot{d}'\dot{x}_1'$ (8). Also ist der Geraden x' der Punkt $\dot{d}'\dot{x}_1'$ und ebenso der Geraden x_1' der Punkt $\dot{d}'\dot{x}'$ zugeordnet.

Beschreibt A die Gerade d, so dreht sich α um e. Hierbei beschreiben die Punkte $\dot{d}'\dot{x}'$ und $\dot{d}'\dot{x}_1'$ die Gerade d' und die ihnen zugeordneten Geraden x_1' und x' den Büschel O'. Somit ist für sämmtliche Gerade und Punkte von ε die polare Beziehung nachgewiesen.

In jedem durch G^3 bestimmten Nullsysteme sind d und e einander zugeordnete Gerade; in jedem zugehörigen Polarsysteme von ε ist daher der Geraden d' der Punkt O' und einem beliebigen Strahle x' von O' derjenige Punkt von d' zugeordnet, welcher auf dem ihm im involutorischen Büschel O' zugeordneten Strahle x_1' liegt. Jedem Ordnungspunkte von d' ist in den Polarsystemen der durch ihn gehende Strahl von O' zugeordnet.

Nun hatten wir ein Nullsystem in der Art festgelegt, dass einer Berührungsebene α von G^3 ihr Berührungspunkt A zugewiesen war; dadurch ist in ε einer Geraden a' ein auf a' liegender Punkt A' zugewiesen (8). A' ist Ordnungspunkt des

Polarsystems, die Ordnungscurve desselben daher reell existirend. *) Besitzt d' Ordnungselemente, so geht die Curve durch sie hindurch und wird in ihnen von s' und s_1' berührt; im anderen Falle hat d' mit der Curve keinen Punkt gemein.

Umgekehrt kann jede Curve II. Ordnung in ε, in Bezug auf welche O' Pol von d' und $d'\dot{x}_1'$ Pol von x' ist, als Ordnungscurve eines Polarsystems angesehen werden, welchem ein durch die Fläche G^3 bestimmtes Nullsystem entspricht. Denn ist A' ein Punkt der Curve, a' ihre Tangente in A', so ist in Bezug auf die Curve der Punkt $x'\dot{a}'$ der Pol der Geraden, welche A' mit $d'\dot{x}_1'$ verbindet. Die Gerade stellt eine Ebene dar, durch welche die Erzeugende x von G^3 aus A projicirt wird. Die Gerade $\overline{O'A'}$ ist die Polare von $d'\dot{a}'$ bezüglich der Curve und im involutorischen Büschel O' dem Strahle zugeordnet, der O' mit $d'\dot{a}'$ verbindet. Daher enthält die durch a' dargestellte Ebene α die Erzeugende, deren Bild $\overline{O'A'}$ ist, und A ist der Berührungspunkt von α. Im Raume ist also einer Ebene α ihr Berührungspunkt A, und jedem Punkte $x'\dot{\varkappa}^2$ der in α liegenden Curve II. Ordnung $\varkappa^2$ von G^3 die durch ihn gehende Ebene $\overline{Ax}$ des Büschels II. Ordnung A zugewiesen; ferner ist in ε dem Büschel O' die Punktreihe d' zugeordnet, und zwar dem Strahle x' der Punkt $d'\dot{x}_1'$, also ist im Raume dem Ebenenbüschel e die zu ihm perspectivische Punktreihe d zugeordnet, das Nullsystem mithin festgelegt (5).

Alle Curven dieser Art bilden einen Büschel; sie berühren sich doppelt in S' und S_1', wenn diese Ordnungselemente von d' reell existiren, und haben im anderen Falle keinen Punkt gemein. Es folgt daraus:

Die Anzahl der durch die Fläche G^3 bestimmten Nullsysteme ist einfach unendlich.

Eine beliebige der Curven und damit ein Polarsystem in ε

*) Reye. „G d. L." II. S. 60.

kann auch in der Art festgelegt werden, dass man das von den Geraden d', x' und x_1' gebildete Dreieck als Polardreieck annimmt und ausserdem einem Punkte B' des Strahls y' von O' eine Gerade des Büschels $d'y_1'$ zuweist.*) Diese Gerade braucht nicht durch B' zu gehen. Daraus folgt:

Um durch die Fläche G^3 ein Nullsystem zu bestimmen, genügt es, den Mittelpunkt des erzeugenden Ebenenbüschels II. Ordnung auf demjenigen Strahle der Regelschaar R^3 anzunehmen, welcher in der Ebene der erzeugenden Punktreihe II. Ordnung liegt.

§. 10.

Abbildung der ebenen Schnittcurven der Fläche und der zu ihnen reciproken Gebilde.

In der Bildebene ε liegt eine Erzeugende c von G^3, deren Punkte mit ihren Bildern zusammenfallen (7). Der durch eine Erzeugende x von G^3 gelegte Ebenenbüschel I. Ordnung und der ihn in ε darstellende Strahlenbüschel I. Ordnung $d'x_1'$ oder X_1' (8;9) werden durch die zu beiden perspectivisch liegende Punktreihe c projectivisch aufeinander bezogen. Die in einer beliebigen Ebene α des Büschels x liegende Curve II. Ordnung $\varkappa^2$ von G^3 hat mit c einen Punkt A' gemein, welcher, als sein eigenes Bild, zugleich auf der Bildgeraden von $\varkappa^2$ liegen muss, also ist $\overline{X'A'}$ das Bild von $\varkappa^2$. Daraus folgt:

Ein durch eine Erzeugende x der Fläche G^3 gelegter Ebenenbüschel I. Ordnung und der ihn in ε darstellende Strahlenbüschel I. Ordnung X_1' werden durch die in der Bildebene liegende Erzeugende c von G^3 in der Art projectivisch aufeinander bezogen, dass jeder Ebene von x der sie darstellende Strahl von X_1' entspricht.

In analoger Weise folgt:

Ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung und der ihn in ε darstellende Strahlenbüschel

1) v. Staudt. „G. d. L.“ S. 133. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 61.

I. Ordnung werden durch die in der Bildebene liegende Erzeugende c von G^3 in der Art projectivisch auf einander bezogen, dass jeder Ebene des Büschels II. Ordnung der sie darstellende Strahl des Büschels I. Ordnung in ε entspricht.

Legt man nun durch $\dot{dx}$ oder X eine beliebige Ebene, welche die Fläche G^3 in einer Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ schneidet, so wird zwischen den Ebenenbüscheln x und x_1 durch die $C^{1,3}$, deren Doppelpunkt X ist (3), eine projectivische Beziehung hergestellt. Die Büschel haben die Ebene $\overline{xx_1}$, durch welche der auf e liegende Punkt der $C^{1,3}$ sowohl aus x, als auch aus x_1 projicirt wird, entsprechend gemein, und erzeugen den Strahlenbüschel, welcher die $C^{1,3}$ aus X projicirt. Der Punkt, in welchem ein Strahl b desselben die $C^{1,3}$ trifft, ist den beiden Curven II. Ordnung von G^3 gemeinsam, welche in den Ebenen $\overline{xb}$ und $\overline{x_1 b}$ liegen. Daher:

Bezieht man zwei Ebenenbüschel, deren Axen x und x_1 zwei sich schneidende Strahlen der Regelschaar R^3 sind, projectivisch auf einander, so dass sie die Ebene $\overline{xx_1}$ entsprechend gemein haben, so liegen die Schnittpunkte der in entsprechenden Ebenen liegenden Curven II. Ordnung der Fläche G^3 auf einer ebenen Curve III. Ordnung der Fläche.

Die den Büscheln x und x_1 entsprechenden Büschel X_1' und X' von ε sind projectivisch auf einander bezogen, weil die Büschel x und x_1 es sind; sie erzeugen daher eine durch X' und X_1' gehende Curve II. Ordnung $C^{1,2}$. Das Bild der Ebene $\overline{xx_1}$ ist im Büschel X' der Strahl x', im Büschel X_1' der Strahl x_1'; x' und x_1' sind einander zugewiesen, weil $\overline{xx_1}$ sich selbst entspricht; mithin geht die $C^{1,2}$ durch den Schnittpunkt O' von x' und x_1'. — Diese Curve $C^{1,2}$ ist das Bild der durch die projectivischen Büschel x und x_1 bestimmten Curve III. Ordnung von G^3, denn die Punkte der $C^{1,2}$ stellen die gemein-

samen Punkte der in entsprechenden Ebenen der Büschel liegenden Curven II. Ordnung von G^3 dar. — Da man umgekehrt von den durch die $C^{1,2}$ projectivisch auf einander bezogenen Strahlenbüscheln X' und X_1' zu den projectivischen Ebenenbüscheln x_1 und x gelangt, so folgt, dass jede Curve II. Ordnung $C^{1,2}$ von ε, welche durch O' und zwei zugeordnete Punkte X' und X_1' der involutorischen Punktreihe d' geht, das Bild einer ebenen Curve III. Ordnung von G^3 ist. —

Man erhält die nämliche Abbildung, aber auch auf solche Curven III. Ordnung von G^3 ausgedehnt, deren Ebenen die Doppellinie d ausserhalb jener Strecke schneiden, auf welcher sich die Erzeugenden von G^3 treffen (1.), auch in folgender Weise.

Es werde die Regelschaar R^3 aus zwei Punkten A und B der Fläche G^3, welche nicht auf der nämlichen Erzeugenden liegen, durch zwei Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt. Legt man nun durch $\overline{AB}$ eine beliebige Ebene σ, und verbindet A und B mit einem Punkte P der in σ liegenden Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ von G^3 durch Gerade, so wird die $C^{1,3}$ von diesen ausser in P und A bezüglich B noch in den Punkten X und Y getroffen. Sind p, a, b die durch die Punkte P, X, Y gehenden Strahlen von R^3, so sind durch R^3 einander zugeordnet die Ebenen $\overline{Ap}$ und $\overline{Bp}$, $\overline{Aa}$ und $\overline{Ba}$, $\overline{Ab}$ und $\overline{Bb}$ (4.). Nun sind aber durch die Ebene σ die Ebenen des Büschels II. Ordnung A involutorisch gepaart, indem je zwei zugeordnete Ebenen desselben sich in einer Geraden von σ schneiden. Der Büschel II. Ordnung B bleibt deshalb projectivisch zum Büschel A, wenn jede Ebene des letzteren mit der ihr durch σ zugeordneten, wenn also $\overline{Ap}$ mit $\overline{Aa}$ vertauscht wird. Das Nämliche gilt aber auch vom Büschel B, d. h. die Ebenen $\overline{Bp}$ und $\overline{Bb}$ können miteinander vertauscht werden, so dass nunmehr die Büschel A und B in der Weise projectivisch aufeinander bezogen sind, dass die Ebenen $\overline{Aa}$ und $\overline{Bb}$ einander entsprechen. Nun liegt der Punkt P von G^3 sowohl in $\overline{Aa}$ wie in $\overline{Bb}$, ohne auf a oder b zu liegen; er

ist daher der gemeinschaftliche Punkt der in den beiden Ebenen liegenden Curven II. Ordnung von G^3 (8). Daraus folgt:

Verbindet man alle Punkte einer auf G^3 liegenden ebenen Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ mit zwei bestimmten Punkten A und B von $C^{1,3}$ durch Kegelschnitte der Fläche G^3, so erhält man zwei Ebenenbüschel II. Ordnung A und B, welche durch die Punkte der $C^{1,3}$ projectivisch aufeinander bezogen sind. Die Büschel nämlich werden von den Ebenen jener Kegelschnitte gebildet.

Nun wird aber der Büschel II. Ordnung A in der Ebene ε durch einen zu ihm projectivischen Strahlenbüschel I. Ordnung A', der Büschel II. Ordnung B durch einen zu ihm projectivischen Strahlenbüschel I. Ordnung B' abgebildet; und weil die Büschel A und B projectivisch aufeinander bezogen sind, so gilt dasselbe von A' und B'. Die Büschel A' und B' erzeugen demnach in ε eine Curve II. Ordnung. In jedem Punkte P' derselben schneiden sich zwei Strahlen von A' und B', und in dem zugehörigen Punkte P von G^3 schneiden sich die Kegelschnitte von G^3, welche in den entsprechenden beiden Ebenen der Büschel A und B liegen. Die Punkte P erfüllen eine $C^{1,3}$ von G^3, welche mit der einfachen Leitlinie e von G^3 einen Punkt gemein hat. Daraus folgt:

Jede ebene Curve III. Ordnung $C^{1,3}$, welche auf der Fläche G^3 liegt, wird in der Ebene ε durch eine den Fundamentalpunkt O' enthaltende Curve II. Ordnung abgebildet.

Dieselbe geht durch zwei zugeordnete Punkte der involutorischen Punktreihe d', wenn die Doppellinie d von der Ebene der $C^{1,3}$ in einem eigentlichen Doppelpunkt geschnitten wird; sie geht nämlich durch die beiden Bilder dieses Doppelpunkts. —

Die Erzeugende von G^3, welche durch den auf e liegenden Punkt einer $C^{1,3}$ von G^3 geht, hat mit der $C^{1,3}$ keinen weiteren Punkt gemein. Daraus folgt:

Die Bilder einer Erzeugenden x und einer ebenen Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ von G^3 schneiden oder berühren sich

in O', je nachdem die $C^{1,3}$ von x in einem ausserhalb oder auf e liegenden Punkte geschnitten wird.

Allgemein, wenn eine Curve in ε ein oder mehrere Male durch O' geht, so geht die entsprechende Curve von G^3 durch diejenigen Punkte von e, in welchen die Erzeugenden, deren Bilder die Curve in O' berühren, e treffen. Daher:

Der gemeinsame Punkt O' zweier Curven der Bildebene stellt nur dann einen gemeinsamen Punkt der entsprechenden Curven von G^3 dar, wenn die ersteren in O' zugleich eine gemeinsame Tangente haben. —

Die drei Punkte A, B, C, in denen die Fläche G^3 von einer Geraden g im Allgemeinen getroffen wird, sind gemeinsame Punkte aller derjenigen ebenen Curven III. Ordnung von G^3, deren Ebenen durch g gehen. Die Bilder dieser Curven gehen daher sämmtlich durch die drei entsprechenden Punkte A', B', C', ausserdem aber durch den Punkt O', woraus folgt:

Die Curven III. Ordnung, in welchen die Ebenen eines Büschels I. Ordnung die Fläche G^3 schneiden, bilden sich ab als Curven II. Ordnung eines Büschels, zu dessen Basispunkten der Fundamentalpunkt O' gehört.

Besitzt G^3 keine Cuspidalpunkte, d' also keine Ordnungselemente (7), so haben alle Curven III. Ordnung, deren Ebenen den Büschel I. Ordnung bilden, auf d einen eigentlichen Doppelpunkt, und alle Bildcurven des Büschels in ε schneiden d' in je zwei zugeordneten Punkten. Besitzt d' aber Ordnungselemente S' und S_1', so trifft nur ein Theil der dem Büschel in ε angehörenden Curven II. Ordnung die Gerade d'.*) Durch diejenigen, welche mit d' keinen Punkt gemein haben, werden solche Curven III. Ordnung abgebildet, deren Ebenen die Gerade d ausserhalb jener Strecke schneiden, auf welcher sich die Erzeugenden von G^3 treffen. Jede dieser Curven III. Ordnung hat den Schnittpunkt ihrer Ebene mit d zum isolirten Punkt.**)

*) Vergl. Steiner-Schröter. l. c. S. 263 u. f.

**) Weyr. l. c. S. 55.

Diejenigen Curven des Büschels in ε, welche d' in je zwei Punkten schneiden, werden von denen, welche d' überhaupt nicht treffen, durch zwei Curven getrennt, welche von d' in S' bezüglich S_1' berührt werden; ihre entsprechenden von G^3 gehen durch einen Cuspidalpunkt S oder S_1 von G^3 und haben ihn zum Rückkehrpunkt (s. u.).

Ein Büschel von Curven II. Ordnung in ε, deren entsprechende ebene Curven III. Ordnung sind, ist durch zwei Punkte A' und B' festgelegt. Denn zwei durch A', B' und O' gelegte Curven II. Ordnung, welche d' in je zwei zugeordneten Punkten treffen, schneiden sich im vierten Basispunkte. Nun gehören zu den Curven des Büschels drei Geradenpaare, deren jedes durch zwei zugeordnete Punkte von d' geht; sie entsprechen den drei Berührungsebenen von G^3, welche durch die Axe $\overline{A\,B}$ des dem Curvenbüschel entsprechenden Ebenenbüschels gehen. Mittelst dieser Geradenpaare gelangt man zu dem nachfolgenden Satze:

> Sind A' und B' zwei auf den Strahlen a' bezüglich b' des Büschels O' liegende Punkte, A_1' und B_1' die den Punkten $a'd'$ bezüglich $b'd'$ zugeordneten Punkte von d', so schneiden sich die Geraden $\overline{A_1'B'}$ und $\overline{B_1'A'}$ in einem Punkte C', welcher mit A' und B' drei auf einer Geraden g liegende Punkte der Fläche G^3 darstellt.

Dieser Satz lehrt, wie von drei Punkten der Ebene ε, welche drei in einer Geraden liegende Punkte von G^3 darstellen, der eine gefunden werden kann, wenn die beiden anderen gegeben sind. — Sollte es eintreten, dass C' mit A' oder B' zusammenfällt, so ist g Tangente wie G^3 (s. u.).

> Das Bild einer ebenen Curve III. Ordnung von G^3 ist im Allgemeinen durch drei Punkte bestimmt.

In der That ist die Ebene der Curve III. Ordnung und damit diese selbst durch drei Punkte bestimmt. Von den drei Punkten in ε dürfen keine zwei auf d' oder auf dem nämlichen Strahle von O', und die entsprechenden drei Punkte des Raumes dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Construirt man dann zu zweien

der drei Punkte, welche nicht auf zwei zugeordneten Strahlen von O′ liegen, nach obigem Satze einen dritten, so hat man mit O′ fünf Punkte, welche die Curve II. Ordnung bestimmen. Umgekehrt, wenn eine durch O′ gehende Curve II. Ordnung, gleichviel, ob sie d′ trifft oder nicht, Bild einer ebenen Curve III. Ordnung von G^3 sein soll, so muss ein Punkt, welchen man zu zwei beliebig angenommenen Punkten der Curve nach dem obigen Satze construirt, auf der Curve liegen.

Wegen der in der Abbildung herrschenden Reciprocität (9) folgt:

Das Bild eines zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschels III. Ordnung (4) ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welchem die Gerade d′ und im Allgemeinen zwei einander zugeordnete Strahlen des involutorischen Büschels O′ angehören.

Dem Büschel III. Ordnung gehört eine Ebene des Büschels d an. Die in ihr enthaltene Erzeugende hat den durch den Berührungspunkt von d′ gehenden Strahl von O′ zum Bilde.

Ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher einen zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschel III. Ordnung darstellt, ist im Allgemeinen durch drei Strahlen bestimmt.

Die Construction eines Strahls, welcher mit zwei gegebenen dreien in einer Geraden g sich schneidenden Berührungsebenen von G^3 entspricht, ist die reciproke zu der dreier Punkte, deren entsprechende auf einer Geraden liegen. — Ferner:

Der gemeinsame Strahl d′ zweier beliebigen Strahlenbüschel der Bildebene stellt nur dann eine gemeinsame, durch d gehende Ebene der entsprechenden Ebenenbüschel dar, wenn die von den Strahlenbüscheln eingehüllten Curven von d′ in dem nämlichen Punkte berührt werden.

Wir bemerken noch, dass durch eine Curve II. Ordnung, welche eine ebene Curve III. Ordnung von G^3 abbildet, zugleich eine Ebene, die Ebene nämlich der Curve, und durch einen Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher einen zu R^3 perspectivischen

Ebenenbüschel III. Ordnung abbildet, ein Punkt des Raumes, der Mittelpunkt nämlich des Ebenenbüschels, festgelegt ist.

Es seien nun A', B', C' drei Punkte in ε, deren entsprechende A, B, C auf einer Geraden g liegen. Dann wird dieselbe Gerade auch festgelegt durch die Geraden $A'B'$, $\overline{B'C'}$ und $C'A'$, denn in jeder der ihnen entsprechenden Ebenen liegen die Punkte A, B, C; z. B. in der durch $A'B'$ dargestellten Ebene liegt C, weil $\overline{O'C'}$ mit $\overline{A'B'}$ den Gesammtdurchschnitt einer Berührungsebene der Fläche mit dieser darstellt. Jedes solche Dreieck $A'B'C'$ kann man daher als Bild einer Geraden des Raums betrachten.

Hieraus folgt zugleich, dass ein Punkt P des Raumes dann in einer gegebenen Ebene π liegt, wenn die Eckpunkte irgend eines Dreiecks $A'B'C'$, welches von drei Strahlen des dem Punkte P entsprechenden Strahlenbüschels II. Ordnung gebildet wird, auf der der Ebene π entsprechenden Curve II. Ordnung liegen; und umgekehrt. Denn P liegt dann auf der durch $A'B'C'$ dargestellten Geraden g, und diese in π.

Wenn g die Fläche G^3 im Punkte A berührt, so berühren sich im Bildpunkte A' die Curven des dem Ebenenbüschel g entsprechenden Curvenbüschels. Es sei $\varkappa^2$ eine dieser Curven, k' ihre Tangente in A'. Verbindet man nun A' mit dem Punkte von d', welcher dem Schnittpunkte von $\overline{O'A'}$ mit d' zugeordnet ist, durch eine Gerade, so wird diese von $\varkappa^2$ in einem Punkte C' getroffen, durch den sämmtliche Curven des Büschels gehen. Die Tangente g wird sowohl durch die Geraden k' und $\overline{A'C'}$, wie durch die Punkte A' und C' dargestellt.

Ist g eine Haupttangente von G^3 im Punkte A (4.), so bilden sich die Curven III. Ordnung, deren Ebenen durch g gehen, als Curven II. Ordnung ab, welche in A' eine dreipunktige Berührung haben. Die gemeinsame Tangente k' der Curven in A' und der Strahl $\overline{O'A'}$ schneiden die Gerade d' in zugeordneten Punkten. Die Haupttangente g wird sowohl durch k', wie durch den Punkt A' und den ihm unendlich benachbarten von k' dargestellt.

Eine $C^{1\cdot3}$ von G^3, deren Bildcurve durch die Punkte X' und X_1' von d' geht, hat mit den durch die Geradenpaare d', x' und d', x_1' festgelegten Ebenen $\overline{dx}$ und $\overline{dx_1}$ des Büschels d, wie die Abbildung zeigt, in $\dot{x}x_1$ je drei zusammenfallende Punkte gemein; mithin sind die Tangenten einer ebenen Curve III. Ordnung von G^3 in ihrem Doppelpunkte die Schnittlinien der Curvenebene mit den beiden Berührungsebenen der Fläche im nämlichen Punkte. Geht die Curve nun durch einen Cuspidalpunkt S, so berührt ihr Bild die Gerade d' in einem Ordnungselemente S'. Die beiden Berührungsebenen von G^3 fallen in eine zusammen, diejenige nämlich, welche d mit der singulären Erzeugenden s verbindet. Die Curve III. Ordnung hat daher S zur Spitze und die Schnittlinie ihrer Ebene mit $\overline{ds}$ zur Tangente in S.*)

Aus der Abbildung bestätigt man, dass die ebenen Schnittcurven der Fläche G^3 im Allgemeinen und höchstens von der vierten Klasse sind (3). Denn ist der Strahlenbüschel II. Ordnung σ^2 das Bild eines zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschels III. Ordnung, dessen Mittelpunkt P in der Ebene einer gegebenen $C^{1\cdot3}$ von G^3 liegt, so hat σ^2 mit dem Tangentenbüschel der Bildcurve der $C^{1\cdot3}$ im Allgemeinen vier Strahlen gemein. Wenn nun die $C^{1\cdot3}$ einen eigentlichen Doppelpunkt oder einen isolirten Punkt besitzt, ihr Bild also die Gerade d' in zwei Punkten oder keinem schneidet, so fällt von den vier Strahlen keiner mit d' zusammen. Daher hat der Ebenenbüschel P mit dem Bündel von Ebenen, welche die $C^{1\cdot3}$ berühren, vier Ebenen gemein, und diese schneiden die Ebene der $C^{1\cdot3}$ in vier durch den Punkt P gehenden Tangenten der $C^{1\cdot3}$. — Hat aber die $C^{1\cdot3}$ den Punkt S zur Spitze, wird ihr Bild $C^{1\cdot2}$ also in S' von d' berührt, so hat σ^2 mit dem Tangentenbüschel der $C^{1\cdot2}$ zwar den Strahl d' gemein, jedoch ist der Berührungspunkt von d' für beide Büschel im Allgemeinen verschieden. Daher entspricht dem Strahle d' keine gemeinsame Ebene des Ebenenbüschels P und des Bündels von Be-

*) Weyr. l. c. S. 57.

rührungsebenen der $C^{1\cdot3}$ (s. o.) Der Büschel und der Bündel haben daher nur drei Ebenen gemein, welche die Ebene der $C^{1\cdot3}$ in drei durch einen Punkt gehenden Tangenten der $C^{1\cdot3}$ schneiden. Eine ebene Curve III. Ordnung mit Rückkehrpunkt ist daher von der III. Klasse,*) und reciprok: Die Berührungsebenen der Fläche G^3, welche durch einen Punkt einer Cuspidalebene gehen, umhüllen eine Kegelfläche III. Ordnung.

§. 11.

Der Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit der geradlinigen Fläche dritter Ordnung.

Eine Curve II. Ordnung $C^{1\cdot2}$ von G^3 hat mit der Curve II. Ordnung, in welcher ihre Ebene eine gegebene Fläche II. Ordnung F^2 schneidet, im Allgemeinen vier Punkte gemein; diese liegen auf der Raumcurve VI. Ordnung $C^{2\cdot3}$, in welcher die Flächen F^2 und G^3 einander schneiden. Das Bild der $C^{2\cdot3}$ wird daher von einer Geraden in ε im Allgemeinen in vier Punkten getroffen. Weil ausserdem die F^2 von den Geraden d und e im Allgemeinen in je zwei Punkten getroffen wird, so folgt:

> Das Bild der Raumcurve VI. Ordnung $C^{2\cdot3}$, in welcher die geradlinige Fläche III. Ordnung und eine Fläche II. Ordnung einander schneiden, ist eine Curve IV. Ordnung, welche im Allgemeinen durch zwei Paare einander zugeordneter Punkte der involutorischen Punktreihe d′ geht und O′ zum Doppelpunkt hat.

Wenn die Doppellinie d von G^3 auf der F^2 liegt, so hat eine $C^{1\cdot2}$ von G^3 mit F^2 im Allgemeinen vier Punkte gemein, von welchen jedoch einer auf d liegt (3). Das Bild des übrig bleibenden Durchschnitts der beiden Flächen wird daher von einer Geraden in ε im Allgemeinen in drei Punkten getroffen, und

*) Plücker. „Theorie der algebraischen Curven.“ Bonn, 1839. S. 210 u. f. — Salmon. „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven.“ Bearbeitet von Fiedler. Leipzig, 1873. S. 75.

ist somit eine Curve III. Ordnung $C^{1,3}$. Weil die Bildcurve $C^{1,2}$ einer ebenen Curve III. Ordnung von G^3 die $C^{1,3}$ ausser in O' im Allgemeinen in vier Punkten trifft, so ist die $C^{1,3}$ das Bild einer Raumcurve IV. Ordnung k^4, woraus folgt, dass d in der Durchschnittslinie VI. Ordnung der Flächen F^2 und G^3 doppelt zu zählen ist. d hat mit der k^4 drei Punkte gemein, weil d' die $C^{1,3}$ in drei Punkten trifft, unter denen sich im Allgemeinen keine einander zugeordneten befinden.

Nun ist eine $C^{1,3}$, welche einen Punkt O' zum Doppelpunkt hat, durch sechs Punkte, von denen keiner mit O' zusammenfällt, bestimmt.*) Legt man daher durch sechs Punkte der Fläche G^3, denen sechs Punkte des Bildes $C^{1,3}$ von k^4 entsprechen, und drei Punkte von d eine F^2, so enthält diese d und schneidet G^3 ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung k^4, deren Bild, eine $C^{1,3}$ mit Doppelpunkt O', mit der gegebenen $C^{1,3}$ identisch ist, weil sie durch die gegebenen sechs Punkte geht. Weil d die k^4 in drei Punkten trifft, lässt sich durch die k^4 nur die eine F^2 legen; denn jede andere F^2 müsste d ebenfalls enthalten. Also ist die F^2 mit der gegebenen identisch. Es folgt:

Die geradlinige Fläche III. Ordnung wird von einer Fläche II. Ordnung, welche die Doppellinie der ersteren enthält, ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung II. Species**) geschnitten. Das Bild der letzteren ist eine Curve III. Ordnung, welche O' zum Doppelpunkt hat und d' in drei Punkten trifft, unter denen sich keine einander zugeordneten befinden. — Umgekehrt:

Jede Curve III. Ordnung in ε, welche O' zum Doppelpunkt hat und d' in drei Punkten trifft, unter denen sich keine einander zugeordneten befinden, ist Bild einer

*) Jonquières. „Mélanges de géométrie pure.“ S. 190. — Vergl. Cremona. Atti d. R. I. L. vol. II.

**) Salmon. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. vol. IV. S. 40 u. f. — Steiner. Crelles Journal Bd. 53. S. 138. — Cremona. Annali di Matematica pura ed applicata. Ser. I. tom. IV. 1861. S. 71 u. f.

Raumcurve IV. Ordnung II. Species; diese liegt auf einer F^2, welche die Fläche G^3 ausserdem in der Doppellinie d schneidet.*)

Geht eine F^2 durch die Leitlinie e von G^3, so ist das Bild des übrigen Durchschnitts V. Ordnung der Flächen eine Curve IV. Ordnung $C^{1,4}$; denn von den vier Schnittpunkten einer $C^{1,2}$ von G^3 mit F^2 liegt keiner auf e (3). Weil von den beiden Schnittpunkten einer Erzeugenden der G^3 mit F^2 der eine auf e, der andere auf der Curve V. Ordnung liegt, so trifft das Bild der Erzeugenden die $C^{1,4}$ ausser in O' nur noch in einem Punkte. Daher:

Die geradlinige Fläche III. Ordnung wird von einer Fläche II. Ordnung, welche die einfache Leitlinie der ersteren enthält, ausserdem in einer Raumcurve V. Ordnung geschnitten, deren Bild eine Curve IV. Ordnung ist, welche O' zum dreifachen Punkte hat und d' in zwei Paaren zugeordneter Punkte trifft.

Wenn bei einer $C^{1,4}$, welche den Durchschnitt einer nicht durch d oder e gehenden F^2 mit G^3 darstellt, zwei von den vier Schnittpunkten mit d' sich vereinigen, so ist dies auch für die anderen beiden der Fall. Dann wird $C^{1,4}$ von d' entweder in zwei einander zugeordneten Punkten X' und X_1' berührt, oder $C^{1,4}$ wird in dem einen, X', von d' berührt und hat X_1' zum Doppelpunkt, oder $C^{1,4}$ hat beide Punkte zu Doppelpunkten.

In jedem Falle trifft d in dem durch die Punkte X' und X_1' dargestellten Punkte X die der $C^{1,1}$ entsprechende $C^{2,3}$ und die F^2 in zwei zusammenfallenden Punkten, ist also im Allgemeinen Tangente der F^2. Im ersten Falle schneiden die Strahlen x' und x_1' von O' die Curve $C^{1,4}$ ausser in O' und X' bezüglich X_1' noch in je einem von X' und X_1' verschiedenen Punkte, die Erzeugenden x und x_1 von G^3 sind also keine Tan-

*) Vergl. Cremona. Atti del R. J. L. vol. II. S. 299. — Bertini. Rendiconti del R. Istituto Lombardo. vol. V. 1872. — Vergl. u. S. 44.

genten der F^2, daher keine der Ebenen $\underline{dx}$ und $\underline{dx_1}$ Berührungsebene der F^2 in X. Nun ist X Doppelpunkt der $C^{2\cdot3}$, denn $C^{2\cdot3}$ wird von jeder Ebene, welche in ε durch eine die Punkte O', X' und X_1' enthaltende Curve II. Ordnung dargestellt wird, in X zweimal getroffen; ihre beiden Tangenten in X fallen aber in eine, nämlich d, zusammen; denn man erhält diese Tangenten, indem man die Ebene, welche F^2 in X berührt, mit den Berührungsebenen von G^3 in X zum Durchschnitt bringt. Nun berührt d die F^2 in X, liegt also in der Berührungsebene derselben in X, zugleich aber auch in den Ebenen $\overline{dx}$ und $\overline{dx_1}$, welche G^3 in X berühren; d ist also die Schnittlinie beider Berührungsebenen von G^3 mit der Berührungsebene der F^2 in X. — Von den Ebenen des Büschels d haben $\underline{dx}$ und $\underline{dx_1}$ mit der $C^{2\cdot3}$ in X je fünf, die übrigen je vier Punkte gemein; mithin berührt sich die $C^{2\cdot3}$ in X selbst.

Ebenso ergiebt sich, dass X ein dreifacher Punkt der $C^{2\cdot3}$ und die Ebene $\underline{dx_1}$ gemeinsame Berührungsebene von G^3 und F^2 in X ist, wenn die $C^{1\cdot4}$ in X' von d' berührt wird, X_1' dagegen zum Doppelpunkt hat, dass ferner X ein vierfacher Punkt der $C^{2\cdot3}$ und F^2 eine Kegelfläche mit X als Scheitel ist, wenn beide Punkte X' und X_1' Doppelpunkte der $C^{1\cdot4}$ sind. —

Wenn O' ein Rückkehrpunkt der $C^{1\cdot4}$ und x' ihre Tangente in O' ist, so wird die F^2 von e im Punkte $\dot{x}e$ berührt. Weil aber x' im Allgemeinen noch einen von O' verschiedenen Punkt mit $C^{1\cdot4}$ gemein hat, so haben die Flächen G^3 und F^2 in $\dot{x}e$ nicht die nämliche Berührungsebene. Wenn jedoch in O' zwei Aeste der $C^{1\cdot4}$ sich berühren*), so dass x' vier Punkte in O' mit $C^{1\cdot4}$ gemein hat, so trifft x die F^2 in $\dot{x}e$ in zwei zusammenfallenden Punkten; daher haben dann die Flächen die Ebene $\underline{\dot{x}e}$ zur gemeinsamen Berührungsebene in $\dot{x}e$. Der

*) Salmon—Fiedler. „Höhere ebene Curven.“ S. 29.

Punkt $\dot{x}e$ ist in diesem besonderen Falle Doppelpunkt der $C^{2,3}$, denn von ihren sechs Schnittpunkten mit einer durch $\dot{x}e$ gehenden Ebene, deren Bild eine $C^{1,2}$ ist, welche in O' von x' berührt wird (10), fallen zwei in den Punkt $\dot{x}e$. — Vorausgesetzt ist, dass die F^2 nicht Kegelfläche mit dem Scheitel $\dot{x}e$ ist.

Die $C^{1,4}$ kann ausser O' noch zwei mit O' nicht in einer Geraden liegende Doppelpunkte besitzen*). Denselben entsprechen ebensoviele Doppelpunkte der $C^{2,3}$. In diesen berühren sich im Allgemeinen die beiden Flächen II. und III. Ordnung. Denn es sei A' ein Doppelpunkt der $C^{1,4}$, welcher auf dem Strahle a' von O' liegt, und k' die Gerade, welche der Punkt $a_1'd'$ mit A' verbindet; a', k' stellen den Durchschnitt einer Berührungsebene α der Fläche G^3 mit dieser dar. Weil k' in A' die $C^{1,4}$ in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, hat die entsprechende Curve II. Ordnung $\varkappa^2$ von α mit der $C^{2,3}$, also mit der F^2 und der in α liegenden Curve II. Ordnung $C^{1,2}$ der F^2 zwei zusammenfallende Punkte gemein. Das Nämliche findet für die Erzeugende a statt, deren Bild a' ist. Mithin ist der durch A' dargestellte Punkt A ein Doppelpunkt der $C^{1,2}$. Ist nun F^2 nicht eine Kegelfläche mit dem Scheitel A, so folgt daraus, dass die Ebene α die F^2 in dem nämlichen Punkte A berührt, wie die Fläche G^3. Umgekehrt, wenn die Flächen sich in einem Punkte berühren, so ist dieser ein Doppelpunkt der $C^{2,3}$,**) und der entsprechende in ε ein Doppelpunkt der Bildcurve $C^{1,4}$. Schliessen wir die Kegelflächen II. Ordnung aus, so folgt:

> Wenn die Fläche G^3 von einer Fläche II. Ordnung, welche von der einfachen Leitlinie der ersteren getroffen wird, in mehr als zwei Punkten berührt wird, so zerfällt die Schnittlinie der beiden Flächen. Die beiden Punkte

*) Salmon—Fiedler. „Höhere ebene Curven.“ S. 34.
**) Salmon. The Cambridge and D. Math. J. vol. V. S. 30.

dürfen ausserdem nicht auf der nämlichen Erzeugenden von G^3 liegen.

Das trifft auch dann zu, wenn sich die Flächen in einem Punkte von e berühren. In O' haben dann zwei Aeste der $C^{1,4}$ eine gemeinschaftliche Tangente k'. $C^{1,4}$ kann in diesem Falle nur noch einen Doppelpunkt besitzen; denn besässe sie noch einen zweiten, so würde eine Curve II. Ordnung, welche durch die beiden Doppelpunkte, O' und einen vierten Punkt der $C^{1,4}$ ginge, ferner von x' in O' berührt würde, mit $C^{1,4}$ neun Punkte gemein haben.

§. 12.

Raumcurven vierter und dritter Ordnung der Fläche G^3.*)

Die Bildcurve $C^{1,4}$ einer $C^{2,3}$ kann in eine Curve III. Ord- $C^{1,3}$ mit Doppelpunkt O' und eine Gerade k' zerfallen, und zwar geht k' durch den Punkt B_1' von d', wenn die $C^{1,3}$ durch die Punkte B', A' und A_1' von d' geht. Zugleich zerfällt die $C^{2,3}$ in eine durch B gehende Curve II. Ordnung und eine Raumcurve IV. Ordnung, welche auf d einen Doppelpunkt A und einen einfachen Punkt B hat. Nun ist die Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ mit dem Doppelpunkt O' durch A', A_1', B' und noch drei von ihren Punkten bestimmt, wenn von den letzteren keiner mit O' zusammenfällt. Legt man durch die entsprechenden fünf Punkte von G^3 und vier Punkte einer Curve II. Ordnung von G^3, deren entsprechende auf einer beliebigen durch B_1' gehenden Geraden liegen, eine F^2, so enthält diese die Curve II. Ordnung, und schneidet G^3 ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung, deren Bild, eine $C^{1,3}$ mit Doppelpunkt O', mit der gegebenen identisch ist. Es folgt:

*) Weyr. l. c. S. 80 u. f. — Vergl. die Note S. 37. — Ferner über Raumcurven IV. Ordnung: Sturm. „Synthetische Untersuchungen über Flächen III. Ordnung.“ Leipzig 1867. S. 66 u. f., 181 u. f. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 125 u. f.; 255. — Ders. (Curven I. Species) Annali di Matematica. Ser. II. tom. II. — Salmon—Fiedler. „Analyt. Geom. des Raums.“ S. 103 u. f. — Cremona. Crelles Journ. Bd. 68. S. 84 u. f.

Eine F^2, welche mit der Fläche G^3 eine Curve II. Ordnung gemein hat, schneidet sie ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung I. Species. Das Bild der letzteren ist eine Curve III. Ordnung, welche O' zum Doppelpunkt hat und d' in drei Punkten trifft, unter denen sich zwei einander zugeordnete befinden. Die Flächen berühren sich in drei Punkten der Curve II Ordnung (11).

Jede Curve III. Ordnung, welche O' zum Doppelpunkt hat und d' in drei Punkten trifft, von denen zwei einander zugeordnet sind, ist Bild einer Raumcurve IV. Ordnung I. Species. Diese hat auf der Doppellinie d von G^3 einen einfachen Punkt und einen Doppelpunkt; im letzteren berühren sich die Flächen II. Ordnung des Büschels, dessen Basiscurve die Raumcurve ist. Die Flächen des Büschels schneiden die Fläche G^3 in Curven II. Ordnung, deren Ebenen durch eine Erzeugende von G^3 gehen. Diese Erzeugende schneidet die Raumcurve IV. Ordnung in ihrem einfachen Schnittpunkte mit d und in keinem zweiten Punkte, während die zweite durch diesen Punkt gehende Erzeugende von G^3 mit der Curve noch einen weiteren Punkt gemein hat.

Dem Büschel gehört die Kegelfläche an, durch welche die Raumcurve aus ihrem Doppelpunkte projicirt wird; die Fläche wird von der Ebene, durch welche d mit der Axe des Ebenenbüschels I. Ordnung verbunden wird, längs d berührt. Eine zweite Fläche des Büschels enthält e und die zweite durch den einfachen Punkt der Curve gehende Erzeugende von G^3. —

Zerfällt die Bildcurve $C^{1,4}$ einer $C^{2,3}$ in zwei Strahlen von O' und eine nicht durch O' gehende Curve II. Ordnung $C^{1,2}$, so zerfällt der Durchschnitt der Flächen F^2 und G^3 in die entsprechenden beiden Erzeugenden und eine Raumcurve IV. Ordnung, deren Bild die $C^{1,2}$ ist. Die Flächen berühren sich in vier Punkten, von denen je zwei auf einer Erzeugenden von G^3 liegen.

Gehen nun die Bilder der beiden Erzeugenden durch zwei

zugeordnete Punkte von d', so geht die $C^{1,2}$ durch zwei andere zugeordnete Punkte, X' und X_1', von d'. Den entsprechenden Punkt X hat die Raumcurve zum Doppelpunkt. — Die $C^{1,2}$ ist im Allgemeinen durch vier Punkte bestimmt. Denn es seien $\varkappa^2$ und λ^2 zwei Curven II. Ordnung, denen Raumcurven IV. Ordnung von G^3 mit einem Doppelpunkte auf d entsprechen. Sie bestimmen in ε einen Büschel von Curven II. Ordnung, welche d' in je zwei zugeordneten Punkten treffen. Mit Hilfe der dem Büschel angehörenden Geradenpaare findet man zu drei Basispunkten desselben C', D', E' den vierten F' auf folgende Weise. Treffen $\overline{C'D'}$ und $\overline{C'E'}$ die Gerade d' in G' und H', so lege man durch die Punkte G_1' und H_1' von d' die Geraden $\overline{E'G_1'}$ und $\overline{D'H_1'}$. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt F'. Ein ausser C', D', E' gegebener Punkt von $\varkappa^2$, welcher mit F' nicht zusammenfällt, bestimmt daher $\varkappa^2$ vollkommen.

Legt man durch vier Punkte von G^3, deren Bilder auf einer durch zwei zugeordnete Punkte von d', aber nicht durch O' gehenden $C^{1,2}$ von ε liegen, durch drei Punkte einer Erzeugenden x und zwei Punkte der Erzeugenden x_1 eine F^2, so enthält diese x und x_1, und schneidet G^3 ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung, deren Bild die gegebene $C^{1,2}$ ist.

Da x und x_1 beliebig angenommen sind, so folgt:

Jede nicht durch O' gehende Curve III. Ordnung, welche d' in zwei einander zugeordneten Punkten trifft, ist Bild einer Raumcurve IV. Ordnung I. Species, welche auf der Doppellinie der Fläche G^3 einen Doppelpunkt hat. Die Raumcurve ist im Allgemeinen durch vier Punkte festgelegt. Die Flächen II. Ordnung des Büschels, dessen Basiscurve sie ist, haben mit der Fläche G^3 ausserdem je zwei sich schneidende Erzeugende der letzteren gemein. Umgekehrt schneidet eine F^2, welche mit G^3 zwei sich schneidende Erzeugende gemein hat, G^3 ausserdem in einer Raumcurve IV. Ordnung I. Species, welche auf d einen Doppelpunkt und zum Bilde eine $C^{1,2}$ hat. Diese $C^{1,2}$ geht durch zwei zugeordnete Punkte von d', aber nicht durch O'.

Zu den Flächen des Büschels gehört die Kegelfläche, durch welche die Raumcurve aus ihrem Doppelpunkte X projicirt wird; diese kann durch die beiden Ebenenbüschel erzeugt werden, deren Axen die Erzeugenden x und x_1 sind. Die ihnen in ε entsprechenden Strahlenbüschel $x_1'd'$ und $x'd'$ (8) werden durch das Bild $C^{1,2}$ der Raumcurve projectivisch auf einander bezogen (10). Umgekehrt folgt:

Bezieht man zwei Ebenenbüschel, deren Axen zwei sich schneidende Erzeugende der Fläche G^3 sind, projectivisch auf einander, so liegen die Schnittpunkte der in entsprechenden Ebenen enthaltenen Curven II. Ordnung von G^3 im Allgemeinen (10) auf einer Raumcurve IV. Ordnung I. Species, welche den Schnittpunkt der Erzeugenden zum Doppelpunkt hat.

Gehen die Strahlen a' und b' von O', welche mit einer nicht durch O' gehenden $C^{1,2}$ den Durchschnitt einer F^2 mit der Fläche G^3 abbilden, durch zwei einander nicht zugeordnete Punkte A' und B' von d', so geht die $C^{1,2}$ durch die diesen zugeordneten Punkte A_1' und B_1'. Die der $C^{1,2}$ entsprechende Raumcurve IV. Ordnung k^4 hat mit den durch die Punkte A und B von d gehenden Erzeugenden a und b je drei Punkte, mit allen andern Erzeugenden von G^3 je zwei Punkte gemein, und wird von den Ebenen $\overline{da_1}$ und $\overline{db_1}$ in A bezüglich B berührt. Weil jede durch k^4 gelegte F^2 mit der gegebenen die Geraden a und b gemein haben muss, also mit ihr identisch ist, so folgt:

Eine F^2, welche mit der Fläche G^3 zwei windschiefe Erzeugende der letzteren gemein hat, schneidet sie ausserdem in eine Raumcurve IV. Ordnung II. Species. Diese ist durch fünf Punkte bestimmt, und hat eine nicht durch O' gehende Curve II. Ordnung zum Bilde.

Jede nicht durch O' gehende Curve II. Ordnung $C^{1,2}$, welche d' in zwei nicht einander zugeordneten Punkten trifft, ist Bild einer Raumcurve IV. Ordnung II. Species. Denn nimmt man fünf Punkte der $C^{1,2}$, unter ihnen ihre

Schnittpunkte A′ und B′ mit d′ an, ferner je zwei Punkte der durch die Punkte A_1' und B_1' von d′ gehenden Strahlen a_1' und b_1' von O′, und legt durch die entsprechenden neun Punkte von G^3 eine F^2, so enthält diese die Erzeugenden a_1 und b_1 von G^3 und geht durch die der $C^{1,2}$ entsprechende Raumcurve k^4; durch k^4 aber lässt sich keine zweite F^2 legen.*)

Die Ebenenbüschel a_1 und b_1 werden durch die Raumcurve projectivisch auf einander bezogen und erzeugen die F^2. Umgekehrt:

> Bezieht man zwei Ebenenbüschel, deren Axen zwei windschiefe Erzeugende der Fläche G^3 sind, projectivisch auf einander, so liegen die Schnittpunkte der in entsprechenden Ebenen enthaltenen Curven II. Ordnung der Fläche auf einer Raumcurve IV. Ordnung II. Species.

Wenn die Bildcurve $C^{1,4}$ des Durchschnitts $C^{2,3}$ einer F^2 mit G^3 in zwei durch O′ gehende Curven II. Ordnung zerfällt, von denen die eine durch diejenigen beiden Puncte von d′ geht, welche den Schnittpunkten der anderen mit d′ zugeordnet sind, so zerfällt die $C^{2,3}$ in zwei Raumcurven III. Ordnung, welche d in den nämlichen beiden Punkten treffen. Die Flächen F^2 und G^3 berühren sich in drei Punkten, die nicht auf der nämlichen Curve II. Ordnung von G^3 liegen (11).

> Jede durch O′ gehende Curve II. Ordnung, welche d′ in zwei einander nicht zugeordneten Punkten trifft, ist Bild einer Raumcurve III. Ordnung. Diese ist durch vier Punkte festgelegt.
>
> Je zwei durch O′ gehende Curven II. Ordnung, von denen die eine mit d′ diejenigen beiden Punkte gemein hat, welche den Schnittpunkten der anderen mit d′ zugeordnet sind, sind Bilder zweier Raumcurven III. Ordnung, welche auf der nämlichen Fläche II. Ordnung liegen.

Denn eine Raumcurve III. Ordnung liegt ganz auf einer F^2,

*) Vergl. Cremona. Ann. di Mat. Ser. I. Tom. IV. S. 78.

wenn sie mit ihr mehr als sechs Punkte gemein hat.*) Nimmt man nun auf der einen $C^{1,2}$ sieben Punkte, auf der anderen zwei von O' und ihren Schnittpunkten mit d' verschiedene Punkte an, wodurch die letztere vollkommen bestimmt ist, und legt durch die entsprechenden neun Punkte von G^3 eine F^2, so enthält diese die entsprechenden beiden Raumcurven.

Das Bild des Durchschnitts von G^3 mit einer F^2, welche die Leitlinien d und e der Fläche G^3 enthält, ist d' und eine Linie dritter Ordnung, welche O' zum dreifachen Punkte hat (11), folglich in drei Strahlen von O' zerfällt. Daher:

Jede F^2, welche die Leitlinien der Fläche G^3 enthält, schneidet sie ausserdem in drei Erzeugenden von G^3.**)

§. 13.

Der Durchschnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung mit der Fläche G^3.

Mit Hilfe einiger bisher nur analytisch bewiesenen Sätze und im Uebrigen auf Grund derselben Methoden, wie sie im Vorhergehenden angewandt worden sind, erhält man die folgenden Sätze:

Der Durchschnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung F^n mit der G^3 ist eine Raumcurve $C^{3.n}$ von der $3n^{ten}$ Ordnung; sie bildet sich ab als ebene Curve $2n^{ter}$ Ordnung $C^{1.2n}$, welche O' zum n-fachen Punkte hat und d' in n Paaren einander zugeordneter Punkte trifft. Die den letzteren entsprechenden Punkte von d sind Doppelpunkte der $C^{3.n}$.

Enthält die F^n die Doppellinie d von G^3 als einfache Gerade, so ist das Bild des übrigen Durchschnitts eine Curve $(2n-1)^{ter}$ Ordnung mit n-fachem Punkte O', der Durchschnitt selbst eine Raumcurve $(3n-2)^{ter}$ Ordnung, welche mit d $2n-1$ Punkte gemein hat.

Enthält die F^n die Leitlinie e von G^3 als einfache Gerade,

*) Reye. „G. d. L.“ II. S. 132.

**) Vergl. Weyr. l. c. S. 78.

so ist das Bild des übrigen Durchschnitts $(3n-1)^{ter}$ Ordnung eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung, welche O' zum $(n-1)$-fachen Punkte hat und d' in n Paaren einander zugeordneter Punkte trifft.

Eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung $C^{1\cdot 2n}$, welche nicht in Curven niedrigerer Ordnung zerfällt, hat höchstens $\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)$ Doppelpunkte. Ein n-facher Punkt einer ebenen Curve löst sich in $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Doppelpunkte auf*); mithin:

Das Bild $C^{1\cdot 2n}$ einer nicht zerfallenden $C^{3\cdot n}$ von G^3 besitzt ausser dem n-fachen Punkte O' höchstens

$$\frac{1}{2}(3n-2)(n-1)$$ Doppelpunkte.

Aber diese sind in Bezug auf ihre Lage nicht unbeschränkt, wie z. B. die beiden Doppelpunkte, welche eine $C^{1\cdot 4}$, das Bild einer $C^{2\cdot 3}$, ausser dem Doppelpunkte O' besitzen kann, mit O' nicht in einer Geraden liegen dürfen (11).

In den entsprechenden Doppelpunkten der $C^{3\cdot n}$ berühren sich im Allgemeinen die Flächen F^n und G^3, während dies in den n Doppelpunkten der $C^{3\cdot n}$ auf d nicht der Fall ist (11).

Die Basiscurve eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung hat mit G^3 $3n^2$ Punkte gemein, durch welche alle Curven $3n^{ter}$ Ordnung gehen, in denen die Flächen des Büschels die Fläche G^3 schneiden. Die Bilder dieser Raumcurven haben daher die entsprechenden $3n^2$ Punkte in ε gemein; sie haben ausserdem n^2 Punkte in O', im Ganzen also $4n^2$ Punkte gemein. Dies ist aber die Anzahl der Basispunkte eines Büschels von ebenen Curven $2n^{ter}$ Ordnung; daher:

Der Büschel von Raumcurven $3n^{ter}$ Ordnung, in welchem ein Flächenbüschel n^{ter} Ordnung die Fläche G^3 schneidet, bildet sich ab als ein Büschel von ebenen Curven $2n^{ter}$ Ordnung, von dessen Basispunkten n^2 in O' zusammenfallen.

Das einer (ebenen oder Raum-) Curve n^{ter} Ordnung reciproke

*) Salmon—Fiedler. „Höhere ebene Curven.“ S. 34.

Gebilde des Raumes heisse ein Ebenenbüschel n^{ter} Ordnung, das einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung reciproke Gebilde der Ebene ein Strahlenbüschel n^{ter} Ordnung. Dann folgt (9):

Eine Fläche n^{ter} Klasse Φ^n hat mit der Fläche G^3 einen Ebenenbüschel $3n^{ter}$ Ordnung gemein. Ihm entspricht in der Bildebene ein Strahlenbüschel $2n^{ter}$ Ordnung, welchem d' als n-facher Strahl und n Paare einander zugeordneter Strahlen des involutorischen Büschels O' angehören.

Gehören alle Ebenen des Büschels e der Φ^n an, so zerfällt der Ebenenbüschel $3n^{ter}$ Ordnung in den Büschel e von doppelt-berührenden Ebenen und einen Ebenenbüschel $(3n-2)^{ter}$ Ordnung, welchem in ε ein Strahlenbüschel $(2n-1)^{ter}$ Ordnung mit n-fachem Strahle d' entspricht. Unter den $2n-1$ Strahlen von O', die ihm angehören, befinden sich im Allgemeinen keine einander zugeordneten.

Gehören alle Ebenen des Büschels d der Φ^n an, so zerfällt der Ebenenbüschel $3n^{ter}$ Ordnung in den Büschel d und einen Ebenenbüschel $(3n-1)^{ter}$ Ordnung; ihm entspricht in ε ein Strahlenbüschel $2n^{ter}$ Ordnung, welchem d' als $(n-1)$facher Strahl und n Paare einander zugeordneter Strahlen von O' angehören.

§. 14.

Die Berührungscurven der Fläche G^3.

Es seien A' und A_1', B' und B_1', C' und C_1' Punktenpaare der involutorischen Punktreihe d'. Ist ferner V' ein nicht auf d' liegender Punkt, so erzeugen die Büschel O' (A', B', C',...) und V' (A_1', B_1', C_1',...) eine Curve II. Ordnung, welche durch die Ordnungselemente S' und S_1' von d' geht, wenn solche vorhanden sind, und im anderen Fall mit d' keinen Punkt gemein hat. Die Punkte der Curve sind die Bilder der Punkte, in denen die Ebenen des Ebenenbüschels II. Ordnung V die Fläche G^3 berühren (8). Daher folgt:

Ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel

II. Ordnung berührt die Fläche G^3 im Allgemeinen in einer Raumcurve III. Ordnung (12), welche durch den Mittelpunkt des Ebenenbüschels geht und mit der Doppellinie d die beiden Cuspidalpunkte gemein hat, wenn solche vorhanden sind.*)

Umgekehrt: Projicirt man die Punkte K', L',.. einer durch O' gehenden Curve II. Ordnung aus O', verbindet K', L',.. mit den Punkten A_1', B_1',.. von d', welche den Schnittpunkten von d' mit $\overline{O'K'}$, $\overline{O'L'}$,.. zugeordnet sind, und findet dann, dass alle Strahlen $\overline{K'A_1'}$, $\overline{L'B_1'}$,.. durch einen Punkt V' der Curve gehen, so stellt diese eine Berührungscurve III. Ordnung von G^3 dar; V' ist das Bild des Mittelpunktes V des Ebenenbüschels, zu dem die Curve gehört. — V ist durch zwei Punkte K und L von G^3 bestimmt, denn V ist der gemeinsame Punkt der beiden Curven II. Ordnung von G^3, deren Ebenen die Fläche G^3 in K und L berühren. Also folgt:

Eine Berührungscurve III. Ordnung der Fläche G^3 ist durch zwei Punkte festgelegt. Durch zwei Punkte von G^3 geht daher nur eine Berührungscurve III. Ordnung, mit Ausnahme der Cuspidalpunkte, durch welche alle gehen.

Es sei σ^2 ein Strahlenbüschel II. Ordnung in ε, welchem ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel III. Ordnung P entspricht (10). Dem Büschel σ^2 gehört d' an; wenn man daher den Strahlen $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$, $\overline{O'C'}$ die durch A_1', B_1', C_1' gehenden Strahlen von σ^2 zuweist, so ist σ^2 projectivisch auf den Büschel O' bezogen. σ^2 und O' erzeugen eine Curve III. Ordnung mit Doppelpunkt O', welche durch die Ordnungselemente von d' geht, wenn solche vorhanden sind. Ihre Punkte sind die Bilder derjenigen, in welchen die Ebenen des Büschels P die Fläche G^3 berühren. Gehen durch O' zwei Strahlen von σ^2, so sind sie die Tangenten der Curve III. Ordnung in O' und im involutorischen Büschel O' einander zugeordnet. Daraus folgt:

*) Vergl. Weyr. l. c. S. 94.

Ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel III. Ordnung berührt die Fläche G^3 im Allgemeinen in einer Raumcurve IV. Ordnung II. Species (11), welche durch jeden Cuspidalpunkt von G^3 geht, und welche die Leitlinie e, wenn überhaupt, in zwei zugeordneten Punkten der involutorischen Punktreihe e trifft (6).

Die Curve ist durch drei Punkte bestimmt. Denn durch die ihnen zugehörenden Berührungsebenen von G^3 ist der Mittelpunkt P des Ebenenbüschels III. Ordnung bestimmt. Projicirt man die drei Bildpunkte K', L', M' aus O', und wird d' von den Projectionsstrahlen in A', B', C' geschnitten, so legen die Geraden $\overline{K'A_1'}$, $\overline{L'B_1'}$, $\overline{M'C_1'}$ den Strahlenbüschel σ^2 fest, welcher dem Ebenenbüschel P entspricht (10).

Projicirt man die Berührungscurve aus P, so erhält man die vom Ebenenbüschel P eingehüllte Kegelfläche IV. Ordnung (4). Jeder Strahl k derselben ist Tangente der Fläche G^3, und trifft sie daher im Allgemeinen noch in einem zweiten, von seinem Berührungspunkte verschiedenen Punkte N. Liegt k in der durch den Strahl k' von σ^2 dargestellten Ebene α, so ist der Berührungspunkt von k' das Bild des Punktes N. Denn es sei l' ein zweiter Strahl von σ^2 und stelle die Ebene β dar; es seien ferner a' und b' die Geraden, welche die den Punkten d'k' und d'l' zugeordneten Punkte von d' mit O' verbinden, so wird die Gerade $\overline{\alpha\beta}$ dargestellt durch die drei Punkte k'l', k'b' und l'a'. Rücken k' und l' unendlich nahe aneinander, so fallen α und β zusammen; die Gerade $\overline{\alpha\beta}$ geht in den Berührungsstrahl von α, das ist die Tangente k von G^3, über; k'b' und l'a' fallen in den Punkt k'a' zusammen, und der Punkt k'l' wird der Berührungspunkt von k', mithin das Bild des Punkts, in welchem k die Fläche zum zweiten Male trifft. Das Bild der Curve, in welcher alle Tangenten k des Kegels P die Fläche G^3 zum zweiten Male treffen, ist somit die von σ^2 eingehüllte Curve $\varkappa^2$, die Curve also eine Raumcurve IV. Ordnung II. Species (12). Diese

mit der doppelt zu zählenden Berührungscurve IV. Ordnung bildet den Durchschnitt XII. Ordnung des Kegels IV. Ordnung mit der Fläche G^3.

Ein Strahl des Kegels P wird im Allgemeinen durch zwei Punkte eines Strahls k' von σ^2 dargestellt, nämlich durch den Berührungspunkt von k' und den Schnittpunkt mit dem Bilde der Berührungscurve IV. Ordnung. Es folgt hieraus, dass je zwei dieser Punktenpaare mit O' durch eine $C^{1,2}$ verbunden werden können, deren entsprechende eine ebene Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ von G^3 ist; denn die entsprechenden vier Punkte liegen in einer durch den Punkt P gehenden Ebene. Betrachtet man die $C^{1,2}$ zugleich als Bild der Ebene der $C^{1,3}$ (10), so folgt, dass sämmtliche durch P gehende Ebenen, d. h. der Ebenenbündel P dargestellt wird durch die Strahlen des Büschels σ^2 und alle diejenigen Curven II. Ordnung, welche O' mit je zwei der in Rede stehenden Punktenpaare verbinden.

Der Büschel O' ist, wenn auf σ^2, zugleich projectivisch auf die Curve $\varkappa^2$ bezogen, und zwar ist einem Strahle von O' der Berührungspunkt des ihm entsprechenden Strahls von σ^2 zugewiesen. Nun kommt es im Allgemeinen und höchstens drei Mal vor, dass ein Strahl von O' durch den entsprechenden Punkt von $\varkappa^2$ geht.*) In demselben Punkte trifft dann der Strahl von O' seinen entsprechenden von σ^2, daher vereinigen sich in diesem Falle die beiden Punkte, welche eine auf dem Kegel P liegende Tangente von G^3 darstellen, d. h. die letztere ist eine Haupttangente von G^3 (10). Daraus folgt, dass durch einen Punkt des Raumes im Allgemeinen drei Haupttangenten von G^3 gehen, und reciprok, dass in einer Ebene im Allgemeinen drei Haupttangenten von G^3 liegen; da dieselben zugleich Wendetangenten der in der Ebene enthaltenen Curve III. Ordnung von G^3 sind, so ergiebt sich der bekannte Satz, dass

*) v. Staudt. „Beiträge zur Geometrie der Lage.“ II. Heft. Nürnberg. 1857. S. 183. — Reye. „G. d. L.“ I. S. 108.

eine Curve III. Ordnung mit Doppelpunkt im Allgemeinen und höchstens drei Wendetangenten besitzt.

Es sind noch die Fälle zu berücksichtigen, wo der Mittelpunkt V eines zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschels II. Ordnung auf einer singulären Erzeugenden s, und der Mittelpunkt P eines zu R^3 perspectivischen Ebenenbüschels III. Ordnung in einer Cuspidalebene es oder σ liegt.

Im ersten Falle haben die Strahlenbüschel $O'(A', B', C'..)$ und $V'(A_1', B_1', C_1'..)$ den Strahl s' entsprechend gemein; sie erzeugen daher eine Gerade, welche durch den Punkt S_1' von d', aber nicht durch O' geht. Mithin:

> Ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen Mittelpunkt auf einer singulären Erzeugenden s liegt, berührt die Fläche G^3 in s (6) und einer Curve II. Ordnung, welche durch den nicht auf s liegenden Cuspidalpunkt geht.

Im zweiten Falle wird der dem Büschel P entsprechende Strahlenbüschel σ^2 von s' in O' berührt. Die projectivischen Büschel σ^2 und O' haben s' entsprechend gemein, und erzeugen daher eine Curve II. Ordnung, welche durch O' und S_1' geht.*) Mithin:

> Ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel III. Ordnung, dessen Mittelpunkt in einer Cuspidalebene σ von G^3 liegt, berührt die Fläche in der in σ liegenden singulären Erzeugenden s (6) und in einer Raumcurve III. Ordnung k^3 (12), welche durch den nicht auf s liegenden Cuspidalpunkt geht.

Der vom Ebenenbüschel P eingehüllte Kegel ist von der III. Ordnung (10); er hat mit G^3 ausser k^3 eine zweite Raumcurve III. Ordnung gemein, deren Bild die von σ^2 eingehüllte Curve II. Ordnung z^2 ist. Der Büschel O' ist projectivisch auf z^2 bezogen, liegt aber nicht perspectivisch zu z^2. Weil nun der Punkt O' auf z^2 liegt, so werden höchstens zwei Punkte von z^2 durch die

*) Reye. „G. d. L." I. S. 109.

ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels O′ projicirt. Der eine dieser Strahlen ist s′; indem man mit ihm einen anderen Strahl k′ von σ^2 zusammenfallen lässt, erkennt man, dass dabei die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen ω und α übergeht in die Gerade, welche P mit ε verbindet; ihr entspricht in dem zum Ebenenbüschel P reciproken Gebilde einer durch den Cuspidalpunkt S gehenden $C^{1,3}$ von G^3 die Tangente der $C^{1,3}$ im Rückkehrpunkte S. Der zweite Punkt von $\varkappa^2$, welcher auf seinem entsprechenden Strahle von O′ liegt, bestimmt eine Haupttangente von G^3, der eine Wendetangente der $C^{1,3}$ entspricht. Daher: Eine ebene Curve III. Ordnung mit einem Rückkehrpunkte besitzt im Allgemeinen und höchstens eine Wendetangente.*)

Die reciproken Sätze über die Ebenenbüschel, welche die Fläche G^3 in den Punkten einer $C^{1,2}$ oder $C^{1,3}$ von G^3 berühren, ergeben sich aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres.

§. 15.

Die Haupttangentencurven der Fläche G^3.

Bezüglich jeder Ordnungscurve $\varkappa^2$ eines Polarsystems von ε, welchem ein durch die Fläche G^3 bestimmtes Nullsystem entspricht, ist O′ Pol von d′, und die durch $\varkappa^2$ hergestellte involutorische Paarung der Punkte von d′ die nämliche, wie die in der Abbildung ursprünglich gegebene (9). Die Tangente k′ von $\varkappa^2$ im Punkte A′ trifft die Gerade d′ daher in einem Punkte, welcher dem Schnittpunkte von $\overline{O'A'}$ mit d′ zugeordnet ist. A′ ist somit das Bild des Punkts A, in welchem die durch k′ dargestellte Ebene die Fläche G^3 berührt, und zugleich mit dem unendlich benachbarten Punkte von k′ das Bild der Haupttangente von G^3 im Punkte A (10). Nun folgen auf $\varkappa^2$ die Punkte A′ stetig auf einander, somit ist $\varkappa^2$ das Bild einer Haupttangentencurve von G^3. Es folgt:

*) Salmon—Fiedler. „Höhere ebene Curven.“ S. 75.

Die Haupttangentencurven der geradlinigen Fläche III. Ordnung sind Raumcurven IV. Ordnung II. Species (12).*) Sie gehen durch die Cuspidalpunkte von G^3, wenn solche vorhanden sind, und haben anderntfalls mit der Doppellinie der Fläche keinen Punkt gemein.

Die Fläche II. Ordnung, welche durch eine Haupttangentencurve gelegt werden kann, enthält ausserdem die singulären Erzeugenden s und s_1 der Fläche G^3, denn diese haben mit der Curve in den Cuspidalpunkten S und S_1 eine dreipunktige Berührung. Legt man nämlich durch eine derjenigen Raumcurven IV. Ordnung II. Species, welche durch Curven II. Ordnung dargestellt werden, eine F^2, so enthält diese ausserdem zwei Erzeugende von G^3, und zwar gehen deren Bilder durch diejenigen Punkte von d', welche den Schnittpunkten der Bildcurve $C^{3,2}$ mit d' zugeordnet sind (12). Dies sind in unserem Falle s und s_1; die drei Schnittpunkte von s bezüglich s_1 mit der Raumcurve fallen aber, wie die Abbildung zeigt, in einen Punkt, den Cuspidalpunkt S bezüglich S_1 zusammen. Die Cuspidalebenen σ und σ_1 haben in S und S_1 mit der Curve je vier Punkte gemein.**)

Das Bild einer Haupttangentencurve kann durch die Strahlenbüschel S' und S_1' erzeugt werden. Daraus folgt:

Existiren die singulären Erzeugenden s und s_1 der Fläche G^3, so erhält man sämmtliche Haupttangentencurven derselben und die Flächen II. Ordnung, auf denen sie liegen, in folgender Weise: Man beziehe die Ebenenbüschel s und s_1 projectivisch auf einander, so dass jedes Mal den Ebenen $\overline{sd}$, $\overline{se}$ die Ebenen $\overline{s_1e}$, $\overline{s_1d}$ entsprechen. Die Schnittpunkte der in entsprechenden Ebenen erhal-

---

*) Clebsch. Crelles Journal. Bd. 67. S. 18. — Cremona. Rendiconti del R. J. L. vol. IV. 1867. — Vergl. auch Cremona. Annali di Mat. Ser. II. tom. I. S. 253.

**) Vergl. Salmon—Fiedler. „An. Geom. des Raums." II. S. 110 und S. 627. Anmerkung 36.

tenen Curven II. Ordnung von G^3 liegen auf einer Haupttangentencurve von G^3.

Da man einer Ebene des Büschels s noch eine beliebige des Büschels s_1 zuweisen kann, so erhält man einfach unendlich viele Flächen II. Ordnung; sie haben die Geraden s und s_1, ferner aber die beiden Geraden, welche S_1 mit se und S mit s_1e verbinden, gemein. Mithin sind die Haupttangentencurven von G^3 die Schnitte eines Büschels von Flächen II. Ordnung, dessen Basiscurve von jenen vier Geraden gebildet wird.*)

In den durch G^3 bestimmten Nullsystemen erscheinen die Haupttangentencurven als die Orte derjenigen Punkte von G^3, denen ihre Berührungsebenen zugeordnet sind. Umgekehrt:

Ordnet man den Punkten einer Haupttangentencurve der Fläche G^3 diejenigen Ebenen als entsprechende zu, welche in ihnen die Fläche berühren, so wird durch die Curve ein Nullsystem bestimmt.

Denn durch die Bildcurve ist in ε ein Polarsystem bestimmt, welches dem Nullsysteme entspricht.

Die Berührungsebene der Fläche G^3 in einem Punkte einer Haupttangentencurve ist zugleich die Schmiegungsebene der Curve im nämlichen Punkte.

Denn ist k' die Tangente der Bildcurve z^2 im Punkte A', so ist der Durchschnitt der Ebene, von welcher die Fläche im entsprechenden Punkte A berührt wird, dargestellt durch die Geraden k' und $\overline{O'A'}$; diese aber treffen z^2 in A' in drei zusammenfallenden Punkten. —

Da das Bild eines beliebigen zur Regelschaar R^3 perspectivischen Ebenenbüschels III. Ordnung mit dem Tangentenbüschel von z^2 im Allgemeinen vier Strahlen gemein hat, von denen keiner mit d' identisch ist, so folgt:

Die von den Schmiegungsebenen der Haupttangentencurven von G^3 gebildeten Ebenenbüschel sind von der vierten Ordnung.

*) Vergl. Cremona. Rendic. d. R. J. L. tom. IV. 1867.

Derselbe Satz ergiebt sich sofort mit Hilfe der Nullsysteme. Als Schmiegungsebenen in den Cuspidalpunkten werden hier die vierpunktig berührenden Cuspidalebenen betrachtet. Wenn man auch die Ebenen der Büschel s und s_1, von denen die Curven in S bezüglich S_1 dreipunktig berührt werden, als Schmiegungsebenen derselben in diesen Punkten ansehen wollte, so würden die Haupttangentencurven der Fläche G^3, wie die allgemeine Raumcurve IV. Ordnung II. Species, von der VI. Klasse sein.*) Denn durch einen beliebigen Punkt des Raums geht ausser den vier früheren Schmiegungsebenen noch je eine Ebene von s und s_1; oder in der Bildebene haben die Strahlenbüschel S′ und S_1' mit dem Bilde eines beliebigen zu R^3 perspectivischen Ebenenbüschels II. Ordnung P ausser der Geraden d′, welcher keine gemeinsame Ebene der Büschel P und s bezüglich s_1 entspricht, noch je einen Strahl gemein.

Bekanntlich gehen im Nullsysteme die Nullebenen aller Punkte einer gegebenen Ebene durch den Nullpunkt dieser Ebene. Daraus folgt:

> Vier Ebenen, welche einer Haupttangentencurve der Fläche G^3 in ihren vier Schnittpunkten mit einer beliebigen Ebene sich anschmiegen, schneiden sich in einem Punkte dieser Ebene.

In allen durch G^3 bestimmten Nullsystemen sind die Leitlinien d und e von G^3 einander zugeordnet (5), somit ist jede Gerade, welche d und e schneidet, ein gemeinschaftlicher Leitstrahl der sämmtlichen Nullsysteme. Oder:

> Die linearen Strahlencomplexe, welche von den Leitstrahlen der durch die Haupttangentencurven der Fläche G^3 bestimmten Nullsysteme gebildet werden, haben ein Strahlensystem 1. Ordnung und I. Klasse**) gemein, dessen Axen die beiden Leitlinien der Fläche G^3 sind.

---

*) Steiner. Crelles J. Bd. 53. S. 138. — Cremona. Annali di Mat. Ser. I. tom. IV. S. 87. — Sturm. l. c. S. 186.

**) Hermes. Crelles J. Bd. 67. — Reye. „G. d. L.“ II. S. 241. — Ders. Crelles J. Bd. 69 und 74. — Silldorf. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. 20.

Geht man von einem Nullsysteme zu einem anderen über, so bewegt sich der Nullpunkt einer gegebenen Ebene auf einer Geraden; dieselbe verbindet die Punkte, in denen die Ebene von den beiden Leitlinien getroffen wird.

Denn die Gerade ist Leitstrahl in allen Nullsystemen, und geht daher immer durch den Nullpunkt der Ebene.

Für die Abbildung folgt hieraus:

Die Tangenten der Bildcurve $C^{1,2}$ einer ebenen Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ von G^3 in denjenigen vier Punkten, in welchen $C^{1,2}$ von dem Bilde $\varkappa^2$ einer Haupttangentencurve geschnitten wird, gehören alle Mal einem Strahlenbüschel II. Ordnung σ^2 an, durch welchen ein zur Regelschaar R^3 perspectivischer Ebenenbüschel III. Ordnung abgebildet wird. $C^{1,2}$ und σ^2 sind reciproke Gebilde in dem durch $\varkappa^2$ bestimmten Polarsysteme, und legen daher eine Ebene und ihren Nullpunkt im entsprechenden Nullsysteme fest. — Beschreibt $\varkappa^2$ den Ordnungscurvenbüschel der Polarsysteme von ε, so beschreibt σ^2 eine Schaar von Curven II. Klasse. Alle Curven dieser Schaar haben die beiden durch die Schnittpunkte der $C^{1,2}$ mit d' gehenden Strahlen von O' zu Tangenten, und werden von d' in dem nämlichen Punkte berührt; dieser Punkt ist demjenigen zugeordnet, in welchem die Tangente der $C^{1,2}$ in O' die Gerade d' trifft.

Hierdurch ist die Curvenschaar in ε und zugleich die Gerade festgelegt, welche die Punkte verbindet, in denen die Leitlinien d und e von der durch die $C^{1,2}$ abgebildeten Ebene getroffen werden.

Eine Haupttangentencurve ist durch einen Punkt A von G^3 bestimmt. Existiren singuläre Erzeugende, so erhält man die Curve als Schnitt der Fläche G^3 mit der durch A gehenden Fläche II. Ordnung des Büschels $(s, s_1, \overline{Ss_1}e, \overline{S_1s}e)$. Das Polarsystem, dessen Ordnungscurve das Bild jener Curve ist, wird dadurch festgelegt, dass man dem Punkte A' diejenige Gerade zuweist, welche A' mit dem dem Schnittpunkte von $\overline{O'A'}$ mit d' zugeordneten Punkte verbindet (9).

III.

§. 16.

Die geradlinige Fläche III. Ordnung mit einer Leitlinie.*)

Wenn die projectivischen Punktreihen e und $\varkappa^2$ einen Punkt mit einander gemein haben (1), so erzeugen sie eine specielle geradlinige Fläche III. Ordnung mit einer Leitlinie, G_1^3. Auf reciproke Art wird G_1^3 erzeugt durch zwei projectivische Ebenenbüschel I. und II. Ordnung, deren Ebenen nicht durch den nämlichen Punkt gehen, und welche eine Ebene, aber nicht entsprechend, gemein haben (2).

Mit der Leitlinie e fällt eine Erzeugende von G_1^3 zusammen, diejenige nämlich, welche den Punkt $e\varkappa^2$ der Punktreihe $\varkappa^2$ mit seinem entsprechenden O′ von e verbindet; e ist also Doppellinie von G_1^3. Jede Ebene des Büschels e enthält eine von e verschiedene Erzeugende, mit Ausnahme der Berührungsebene ε von $\varkappa^2$; ebenso geht durch jeden Punkt von e eine von e verschiedene Erzeugende, mit Ausnahme des Punkts O′. Der Büschel e ist vermittelst $\varkappa^2$ projectivisch auf die Punktreihe e bezogen. Der Ebene ε, der Cuspidalebene, entspricht der Punkt O′, der Cuspidalpunkt von G_1^3.

Zur Bildebene von G_1^3 nehmen wir die Ebene ε. Eine an zwei festen Erzeugenden a und b und einer dritten x gleitende Gerade beschreibt in ε die Bildgerade x′ von x; x′ liegt mit a, b und x in einer Regelschaar II. Ordnung. Nun wird durch diese Regelschaar, zu deren Leitlinien e gehört, der Büschel e projectivisch auf die Punktreihe e bezogen, und zwar entsprechen den Ebenen $\overline{ea}$, $\overline{eb}$, $\overline{ex}$ die Punkte $\dot{ea}$, $\dot{eb}$, $\dot{ex}$. Dies ist aber die durch die Fläche G_1^3 bestimmte Beziehung

*) Auf die Fläche hat zuerst Cayley aufmerksam gemacht. S. Cremona. Crelles J. Bd. 60. — Vergl. Clebsch. Crelles J. Bd. 67. S. 18. — Cremona. Crelles J. Bd. 60. S. 313. — Ders. Rendiconti del R. J. L. vol. IV. 1867. — Weyr. l. c. S. 109 u. f.

zwischen Büschel und Punktreihe e; daher ist der Bildpunkt $\dot{e}x'$, welcher der Ebene $\overline{ex'}$ oder ε in der durch die F^2 festgelegten Beziehung zwischen Büschel und Punktreihe e entspricht, identisch mit O', und x', das Bild von x, geht durch O', oder:

> Die Erzeugenden der Fläche G_1^3 werden durch die Strahlen des Büschels O' abgebildet. Der Punkt O' ist Bild aller Punkte der Geraden e.

Legt man durch a eine Ebene α, welche die Fläche G_1^3 in der Curve II. Ordnung $\varkappa^2$, ε in der Geraden g, b und x in den Punkten B und X von $\varkappa^2$ schneidet, so gehört $\overline{BX}$ der durch a, b, x bestimmten Regelschaar an. Trifft $\overline{BX}$ die Gerade g in X', so ist $\overline{O'X'}$ identisch mit x'. Der Strahl e des Büschels O', welcher in der Bildebene d' heissen möge, fällt mit der durch ihn abgebildeten Erzeugenden e von G_1^3 zusammen. Der Büschel O' ist vermittelst des Büschels B (g) projectivisch auf $\varkappa^2$ und e bezogen, und zwar ist einem Strahle x' von O' derjenige Punkt X' von e oder d' zugeordnet, in welchem die durch x' abgebildete Erzeugende x die Gerade e trifft; der Geraden d' ist der Punkt O' zugeordnet. Mithin:

> Jedem Punkte der Doppellinie e von G_1^3 entsprechen in der Bildebene ε zwei Punkte, nämlich O' und ein zweiter Punkt von d'.

Wenn eine Gerade an a, b und einer Curve II. Ordnung λ^2 von G_1^3 gleitet, so schneidet sie die Ebene ε in den Punkten einer Geraden l'. Nun wird jede Curve II. Ordnung λ^3 von G_1^3 von ε in demjenigen Punkte von e berührt, welcher auf der in der Curvenebene enthaltenen Erzeugenden x liegt. λ^2 und l', weil auf der nämlichen F^2 liegend, müssen einen Punkt gemein haben; dies ist aber der Punkt $\dot{x}e$, weil kein anderer Punkt von λ^2 in ε liegt. Es folgt:

> Das Bild einer Curve II. Ordnung von G_1^3 ist eine nicht durch O' gehende Gerade.

Dem Punkte $\dot{x}e$ oder $\dot{x}d'$ ist in der projectivischen Beziehung

des Büschels O′ und der Punktreihe d′ der Strahl x′ von O′, das Bild von x, zugewiesen. Daraus folgt:

> Sind x′ und X′ in der projectivischen Beziehung des Büschels O′ und der Punktreihe d′ einander zugeordnet, so werden durch die Strahlen des Büschels X′ diejenigen Curven II. Ordnung von G_1^3 abgebildet, deren Ebenen sich in der Erzeugenden x schneiden.

Der Strahlenbüschel X′ in ε bildet zugleich den Ebenenbüschel x ab (9) und ist projectivisch zu ihm. Durch eine den Punkt $\dot{x}e$ oder X enthaltende ebene Curve III. Ordnung $C^{1,3}$ von G_1^3 werden die Ebenenbüschel x und e projectivisch aufeinander bezogen, so dass sie die Ebene $\overline{xe}$ entsprechend gemein haben. Die entsprechenden Büschel X′ und O′ von ε erzeugen daher eine Curve II. Ordnung, welche das Bild der $C^{1,3}$ ist. Der Ebene $\overline{ex}$ entsprechen in X′ und O′ die Strahlen d′ bezüglich x′. Daher:

> Das Bild einer ebenen Curve III. Ordnung von G_1^3 ist eine Curve II. Ordnung, welche durch O′ und einen zweiten Punkt X′ von d′ geht, und welche in O′ von dem dem Punkte X′ zugeordneten Strahle x′ berührt wird.

In dem durch zwei solche Curven bestimmten Büschel ist diejenige Curve, welche in O′ von d′ berührt wird, das Bild einer durch den Cuspidalpunkt O′ gehenden $C^{1,3}$ von G_1^3. O′ ist Rückkehrpunkt der Curve $C^{1,3}$; ihre Tangente in O′ ist der Schnitt ihrer Ebene mit der Cuspidalebene ε von G_1^3.

Das Bild des Durchschnitts einer F^2 mit G_1^3 ist eine Curve IV. Ordnung, welche O′ zum Doppelpunkt hat, von d′ ausserdem in zwei Punkten getroffen und von den ihnen zugeordneten Strahlen des Büschels O′ in O′ berührt wird.

Eine Curve II. Ordnung in ε, welche durch O′ geht, deren Tangente in O′ aber von dem ihrem zweiten Schnittpunkte mit d′ zugeordneten Strahle des Büschels O′ verschieden ist, ist das Bild einer Raumcurve III. Ordnung, eine

nicht durch O' gehende Curve II. Ordnung das Bild einer Raumcurve IV. Ordnung.

Ein Ebenenbüschel II. Ordnung, welcher die Erzeugenden von G_1^3 aus einem Punkte von G_1^3 projicirt, berührt die Fläche in einer Raumcurve III. Ordnung, deren Bild eine von d' in O' berührte $C^{1\cdot 2}$ ist. Verbindet man die Punkte, in welchen die Strahlen von O' diese $C^{1\cdot 2}$ treffen, mit den den respectiven Strahlen zugeordneten Punkten von d' durch Gerade, so laufen sämmtliche Verbindungslinien durch einen Punkt der Curve (14).

Das Bild eines Ebenenbüschels III. Ordnung, welcher die Erzeugenden der Fläche aus einem nicht auf ihr liegenden Punkte P projicirt, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung; ihm gehört d' an, und sein zweiter durch O' gehender Strahl x' ist dem Berührungspunkte X' von d' zugeordnet. — Das Bild der Raumcurve IV. Ordnung, in welcher der Büschel P die Fläche berührt, ist eine Curve III. Ordnung, welche O' zum Doppelpunkt hat, und welche in O' von d' und x' berührt wird. —

In den Polarsystemen von ε, welche den durch G_1^3 bestimmten Nullsystemen entsprechen, ist jedes Mal dem Büschel O' die Punktreihe d' in der durch die Abbildung festgestellten Weise zugeordnet. Das Polarsystem ist bestimmt, wenn man einer durch den Punkt X' von d' gehenden Geraden einen Punkt auf der zugeordneten Geraden x' von O' zuweist*), und man erhält sämmtliche Polarsysteme, wenn man dieser Geraden der Reihe nach sämmtliche Punkte von x' zuweist, mit der Beschränkung, dass O' der Geraden d' zugeordnet bleiben muss. — Die Ordnungscurven der Systeme sind die Bilder der Haupttangentencurven von G_1^3; letztere sind Raumcurven III. Ordnung; sie gehen durch den Cuspidalpunkt von G_1^3 und haben in ihm die Cuspidalebene zur Schmiegungsebene. —

*) v. Staudt. „Geometrie der Lage.“ S. 134.